Н. Т. КУЗОВКОВ

СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Н. Т. КУЗОВКОВ

СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ (БАЛЛИСТИЧЕСКИХ И ЗЕНИТНЫХ РАКЕТ)

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов авиационных специальностей
высших учебных заведений



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1976

~~6Т6~~
К89
УДК 629.7.62.2(075.8)

Рецензенты:
Соответствующая кафедра МАИ,
проф. В. А. Боднер

Кузовков Н. Т.

К89 Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет). Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1976.

304 с. с ил.

В учебном пособии даются уравнения и математические модели баллистических и зенитных ракет, учитывающие изгибные колебания продольной оси и колебания жидкости в баках. С помощью методов модального управления устанавливаются структура и параметры автопилота, при которых системы стабилизации удовлетворяют заданным требованиям. Излагаются особенности формирования контуров стабилизации вращающихся ракет и методы исследования контуров наведения при учете переменности дальности. Указываются способы измерения углового положения ракеты с помощью гироскопических устройств и бесплатформенной системы инерционной навигации.

Предназначается для студентов авиационных вузов. Может быть полезной для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием систем стабилизации летательных аппаратов.

К $\frac{31902-190}{001(01)-76}$ 150— 75 6Т6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для подготовки студентов, специализирующихся по проектированию и расчету систем стабилизации летательных аппаратов (ЛА), совершающих полет в земной атмосфере, в основном, беспилотных объектов. Круг относящихся к теме вопросов столь широк, что охватить их в одной книге не представляется возможным. Поэтому пришлось ограничиться только изложением методов линейной теории систем управления ЛА.

Линейная теория систем стабилизации в последнее десятилетие развивалась чрезвычайно быстро, в результате чего возникли новые направления, ставящие в повестку дня полный пересмотр традиционных подходов при расчете и проектировании этих систем. Из новых подходов в книге рассматриваются методы модального управления (управления корнями замкнутой системы) при полной информации о переменных состояния и использование фильтров Калмана и Льюинбергера для наблюдения переменных состояния, недоступных прямому измерению. Эффективность этих подходов и их место в общей теории линейных систем управления становятся ясными лишь на фоне достаточно подробного рассмотрения традиционных методов исследования (частотного, корневых годографов и линий равного демпфирования). Это и определило материал книги, касающийся методов анализа и синтеза систем управления аэродинамических ЛА (гл. VI).

Наряду с рассмотрением замкнутых систем стабилизации и управления в учебном пособии большое внимание уделяется математическим моделям ЛА и автопилотов и составлению их уравнений. Автор задался целью показать, что, следуя определенной методике, можно в любом случае составить уравнения движения, не допустив ошибок в знаках перед отдельными членами. Методика основана на тщательном учете направлений положительного отсчета углов, определяющих положение одной системы координат по отношению к другой (гл. IV, V), и иллюстрирована на примерах конкретных систем «объект—автопилот».

Математические модели ЛА и автопилота рассматриваются в порядке возрастания их сложности, а не постепенным упрощением первоначально составленной сложной модели, как это принято во многих учебных пособиях. Это, как нам кажется, делает материал книги более доступным широкому кругу читателей и позволяет ввести достаточно сложные модели, представляющие интерес при углубленном изучении курса. В качестве примера можно указать на математическую модель баллистической ракеты, учитывающую взаимодействие изгибных колебаний и аэродинамических сил (явление флаттера), в книжной литературе ранее не рассматривавшуюся (гл. V и VI).

В несколько большей степени, чем в других учебных пособиях, в книге использованы методы прикладной теории гироскопов (гл. II IV, VII). Это объясняется большим интересом, проявляемым сейчас в мировой литературе к вращающимся ракетам, исследование которых можно выполнить лишь при тесном взаимодействии методов теории управления и теории гироскопов.

По ходу изложения различные задачи решались, по возможности, единообразными методами. Так, сложная пространственная модель баллистической ракеты, получающаяся при учете статических отклонений, была разделена на простые подсистемы при помощи метода малого параметра (гл. V). Этот метод был применен для приближенного интегрирования уравнений плоской системы самонаведения, учитывающих переменность дальности (гл. VIII).

Весь конкретный цифровой материал, конструкции и схемные решения заимствованы из зарубежной литературы.

Первые главы книги носят вводный характер и используют достаточно простой математический аппарат. Аппарат матричного исчисления применяется лишь в четвертой и последующих главах, причем в данных главах попутно объясняются и основные правила этого исчисления.

Автор благодарен кафедре МАИ, возглавляемой акад. Б. Н. Петровым, за ценные советы и замечания, касающиеся подбора и изложения материала. Автор приносит благодарность рецензенту проф. В. А. Боднеру за детальный разбор рукописи и важные замечания, и инженерам А. А. Петрыкину и Г. И. Симонову за помощью в проведении расчетной и графической работы.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Разработка автоматически действующих устройств, способных без вмешательства летчика отклонять рули и тем самым поддерживать требуемый режим движения летательного аппарата, началась почти одновременно с появлением первых летательных аппаратов. Это объясняется стремлением освободить летчика от утомительной работы по постоянному манипулированию рулями и создать ему благоприятные условия для решения других (например, навигационных) задач. Такие автоматически действующие устройства называют *автопилотами*.

Самолетные автопилоты предназначены для поддержания неизменного углового положения самолета. Помимо угловой стабилизации некоторые из автопилотов позволяют автоматически совершать вираж, а при взаимодействии с наземными радиолокационными установками производить взлет и посадку самолета.

Одновременно с самолетными автопилотами и даже несколько раньше их стали создавать и совершенствовать автоматические устройства, предназначенные для управления движущимися объектами, не имеющими на своем борту экипажа (первым из такого рода устройств, получившим повсеместное распространение, явился направляющий аппарат морской торпеды, предложенный в 1896 г., см. § 3.1). Автоматические устройства, поддерживающие заданное угловое положение беспилотных движущихся объектов, называют *системами стабилизации*. Под заданным угловым положением следует понимать угловое положение корпуса объекта, задаваемое в виде некоторой функции времени (т. е. не обязательно неизменное угловое положение).

Системы стабилизации беспилотных объектов по принципу действия не отличаются от самолетных автопилотов прямой схемы (см. стр. 12), хотя в конструктивном отношении обычно более просты, и, подобно последним, могут состоять из трех каналов, предназначенных для стабилизации объекта соответственно по углам *тангажа, рыскания и крена*.

Каждый из каналов самолетного автопилота обычно называют автоматом стабилизации. В дальнейшем независимо от того, идет ли речь о беспилотном объекте или объекте с экипажем, каждый из каналов стабилизации будет обозначаться термином «автопилот» или «автомат стабилизации», т. е. эти термины будут рассматриваться как синонимы.

Каналы стабилизации осесимметричного объекта по курсу и тангажу по своей принципиальной схеме не отличаются друг от друга. Это дает возможность ограничиться рассмотрением какого-либо одного канала. В дальнейшем в качестве такого канала преимущественно будем рассматривать курсовой автомат стабилизации.

Любой автопилот (автомат стабилизации) вместе со стабилизируемым объектом образуют замкнутую систему автоматического регулирования «объект — автопилот», в которой регулируемой величиной является тот или иной угол, определяющий положение корпуса объекта относительно системы отсчета.

Первые системы «самолет — автопилот» были, в основном, системами автоматического регулирования прямого действия. Примером может служить маятниковый автопилот, предложенный в 1910 г. Ольховским и осуществленный в 1912 г. (рис. В.1).

Маятниковый автопилот предназначался для стабилизации самолета по углу тангажа [18]. Чувствительным элементом, измеряющим отклонение регулируемой величины (угла тангажа) от номинального значения, являлся физический маятник *1* (роль маятника выполняло кресло вместе с сидящим на нем пилотом). Исполнительный орган

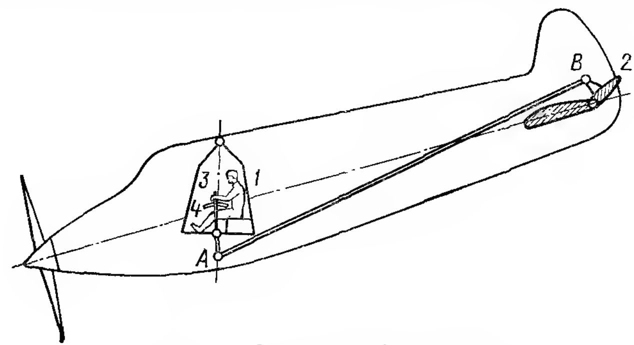


Рис. В.1. Маятниковый автопилот

(горизонтальные рули *2*) отклонялся от равновесного положения силой, развиваемой при наклонах продольной оси самолета самим чувствительным элементом (маятник, сохраняющий при любом угловом положении самолета примерно вертикальное положение, соединялся с кронштейном руля посредством жесткой тяги *AB*). Ручка управления *3* фиксировалась относительно кресла стопором *4*.

Можно представить себе аналогичный по принципу действия автопилот, способный удерживать самолет на заданном курсе (рис. В.2). В этом гипотетическом автопилоте роль чувствительного элемента выполняет мощный трехстепенный гироскоп. Наружное кольцо *Г* гироскопа сохраняет свое угловое положение в пространстве неизменным и, следовательно, не участвует вместе с самолетом в движении рыскания (подшипники оси вращения наружного кольца жестко связаны с корпусом самолета, а сама ось перпендикулярна плоскости крыльев). Когда продольная ось самолета совпадает с заданным курсом (номинальное положение самолета), плоскость наружного кольца перпендикулярна продольной оси самолета, руль стоит нейтрально и вся система в целом находится в равновесном состоянии. При нарушении равновесного состояния, например, при отклонении самолета вследствие какой-либо причины на некоторый угол от заданного курса, кольцо *Г* гироскопа, сохраняя неизменной свою ориентацию в пространстве, повернется относительно самолета на такой же угол. Если

самолет повернется по часовой стрелке, то кольцо *Г* поворачивается относительно самолета против часовой стрелки (рис. В.3), и наоборот.

Поворот кольца *Г* относительно самолета вызывает смещение тяги *АВ* относительно самолета и, следовательно, поворот руля. Соединения осуществлены таким образом, что руль отклоняется в направлении, при котором создаваемый им момент $M_р = F_р b = C_2 \delta$ вокруг центра тяжести (ЦТ) самолета возвращает самолет на заданный курс. При малых отклонениях угол поворота руля δ от нейтрального положения пропорционален углу отклонения ψ самолета от заданного курса, т. е.

$$\delta = a_0 \psi. \qquad (В.1)$$

Это становится особенно очевидным, если обратить движение, т. е. всем элементам схемы (самолет, кольцо *Г* гироскопа и связанное с ним направление «заданный курс») сообщить угловую скорость, равную по величине угловой скорости самолета $\dot{\psi}$, но противоположно направленную. Тогда *самолет станет неподвижным*, а наружное кольцо *Г* гироскопа вместе с направлением «заданный курс» будут поворачиваться относительно корпуса самолета с угловой скоростью $-\dot{\psi}$. Поворот кольца *Г* относительно корпуса самолета на угол ψ вызовет через тягу *АВ* пропорциональное отклонение δ руля от нейтрального положения (рис. В.4).

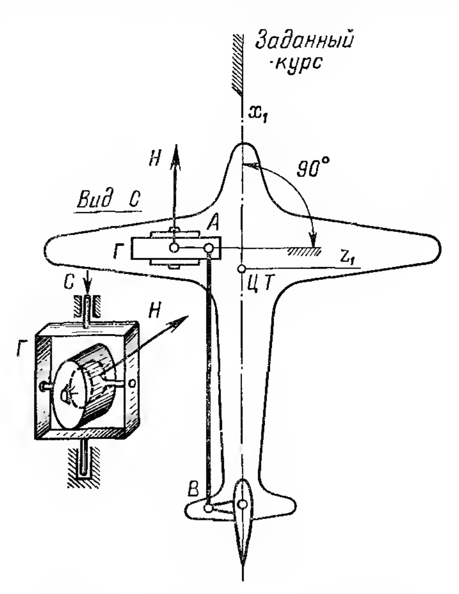


Рис. В.2. Система «самолет — гипотетический автопилот» в равновесном состоянии

Этот авиапилот не мог найти практического применения, так как размеры и вес трехстепенного гироскопа, способного сохранять ориентацию наружного кольца в условиях действия значительного момента со стороны тяги *АВ*, должны бы быть непомерно большими. Можно, однако, функции тяги *АВ* (передача движения от гироскопа к рулю) возложить на какую-либо силовую следящую систему, т. е. перейти от прямого к косвенному регулированию. Входным сигналом этой следящей системы должен быть угол ψ_1 поворота кольца *Г* гироскопа относительно корпуса самолета, а выходным — угол поворота руля δ относительно корпуса самолета.

В многочисленных схемах автопилотов, получивших практическое применение, использована именно эта возможность [1], [2], [3], [12].

В качестве примера на рис. В.5 приведена схема пневмогидравлического автопилота, относящаяся к 1936 г. Схема работает следующим

образом [18]. Внутри герметичного кожуха *4* помещен небольшой трехстепенный гироскоп, ориентированный так же, как в гипотетическом автопилоте на рис. В.3 (на рис. В.5 гироскоп не показан). Заслонка *1*, жестко связанная с наружным кольцом гироскопа, не принимает участия в угловых движениях самолета при его рыскании.

Рядом с заслонкой помещается соосный с ней рычаг *2*, не имеющий связи ни с заслонкой, ни с гироскопом. Рычаг имеет щелевидные окна *3*, перекрываемые заслонкой наполовину, когда самолет находится на заданном курсе. Окна соединены трубками с полостями пневматического реле, представляющего собой камеру, разделенную пополам кожаной мембраной *5*. Центр мембраны связан тягой с золотником *7*,

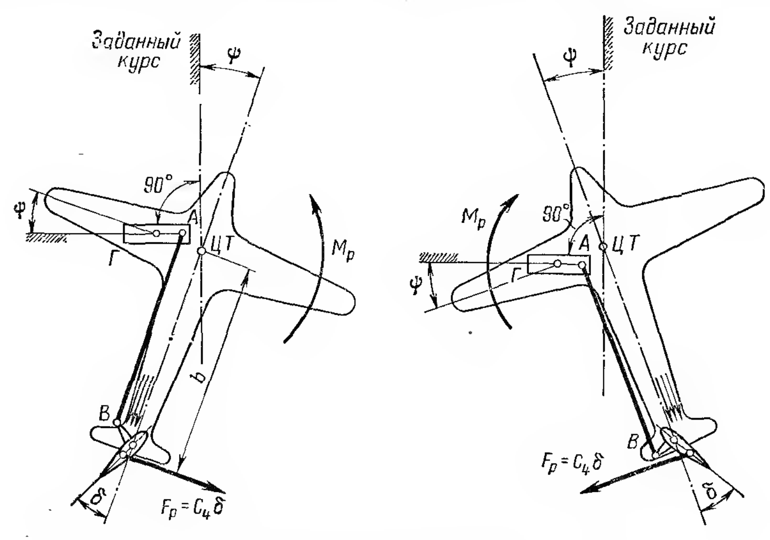


Рис. В.3. Система «самолет — гипотетический автопилот» в возмущенном состоянии

управляющим работой гидроцилиндра *12*. Гидроцилиндр и золотниковое устройство образуют рулевую машинку *РМ*, называемую также сервоприводом.

Полости пневмореле сообщаются с атмосферой через капиллярные отверстия *6*. В кожухе *4* при помощи насоса создается вакуум. Через капиллярные отверстия *6* пневмореле воздух засасывается и поступает внутрь кожуха *4* через щели *3* рычага *2*. Если самолет отклонится от заданного курса, то рычаг *2* со щелями сместится относительно заслонки *1* гироскопа, в результате чего одна щель откроется, а другая прикроется. При этом вакуум в полости реле, сообщающейся с открытой щелью, увеличится, а с закрытой — уменьшится. Это приведет к смещению мембраны *5* и связанного с ней золотника *7*. Масло под давлением через открывшееся окно *9* золотниковой коробки *8* попадает в одну из полостей рулевой машинки, другая полость через другое окно золотниковой коробки сообщается со сливной магистралью.

Поршень рулевой машинки, смещая шток *14*, отклоняет руль *13*

и одновременно через трос *15* вращает ролик обратной связи *16*. Вращение ролика *16* через дифференциал *17*, передается на рычаг *2* со щелями, который поворачивается в направлении равного перекрытия щелей заслонкой. При равном перекрытии доступ масла в полости рулевой машинки прекратится (так как золотник *7* под действием центрирующих пружин *10* вернется в нейтральное положение) и руль *13* окажется отклоненным на угол δ, пропорциональный углу отклонения самолета от заданного курса. Рукоятка *18* служит для изменения курса самолета, а кран *11* — для выключения автопилота.

При мгновенном протекании описанных выше переходных явлений рассмотренный автопилот осуществляет такую же связь (В.1) между углом рыскания самолета и углом отклонения руля, как и рассмотренный ранее гипотетический автопилот.

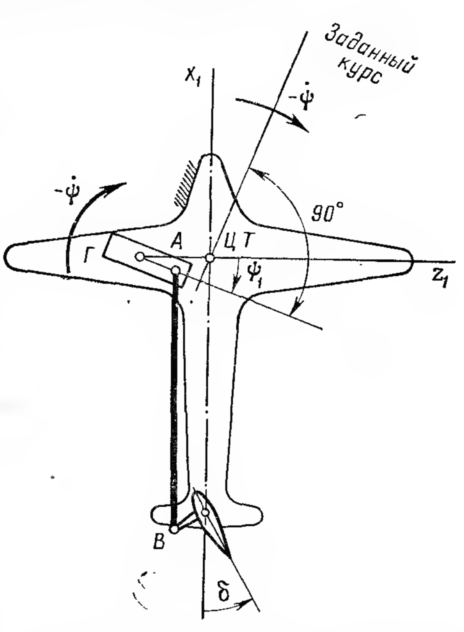


Рис. В.4. Система «самолет — гипотетический автопилот» при обращении движения

Уравнение, выражающее связь между углом δ отклонения руля и углом ψ отклонения объекта от заданного положения, называют *законом регулирования*. Наиболее часто в автопилотах реализуются закон регулирования по отклонению

$$\delta = a_0\psi;$$

закон регулирования по отклонению и по скорости

$$\delta = a_0\psi + a_1\dot{\psi}; \qquad (В.2)$$

закон регулирования по отклонению, скорости и интегралу

$$\delta = a_{-1}\int\psi dt + a_0\psi + a_1\dot{\psi}. \qquad (В.3)$$

Одна из главных задач синтеза автопилота заключается в выборе параметров a_i закона регулирования, называемых передаточными числами автопилота.

Примером автопилота, в котором осуществляется регулирование по отклонению и по скорости, может быть автопилот со схемой, приведенной на рис. В.6 (разработка этого автопилота относится к началу сороковых годов). В качестве датчика углового отклонения ψ объекта от заданного курса здесь использован свободный гироскоп (курсовой гироскоп), а в качестве датчика угловой скорости отклонения $\dot{\psi}$ — прецессионный гироскоп [25].

Прецессионный гироскоп, разработанный для практического применения значительно позднее (1910 г.), чем свободный гироскоп (середина XVIII в), называют также «двухстепенным», «скоростным», «опережающим», «дифференцирующим», «указателем поворота» и «ДУСом»

(датчик угловой скорости). В дальнейшем будем использовать преимущественно последний термин.

Сигналы ψ и $\dot{\psi}$, снимаемые соответственно с курсового гироскопа *1* и ДУСа *4*, суммируются рычажным дифференциалом *6*. Суммарный сигнал в виде механического перемещения преобразуется рычажной передачей в смещение золотника *8*. Плечо *a* рычага *7* выполняет роль

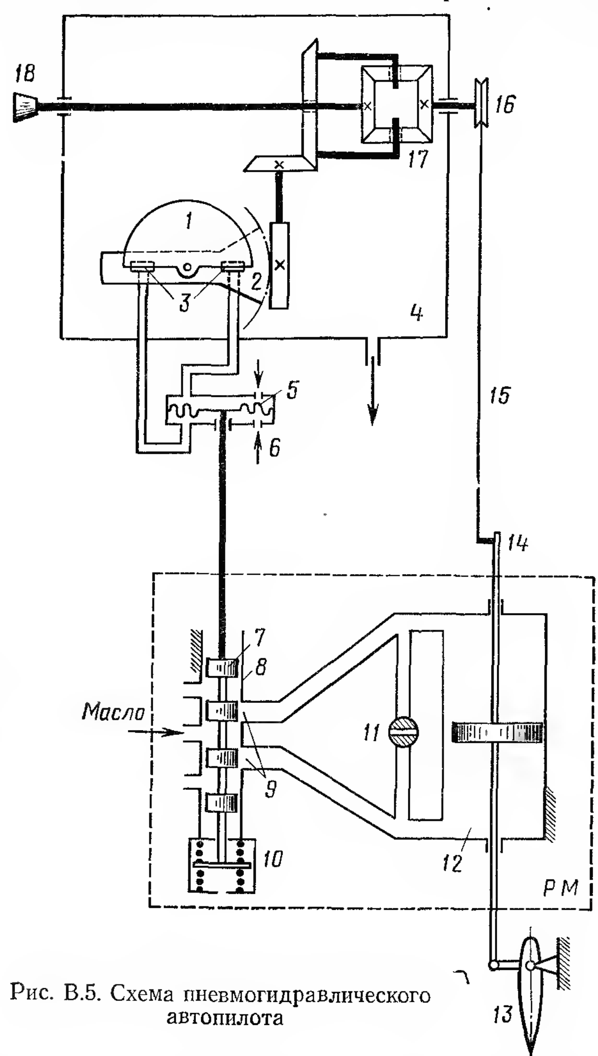


Рис. В.5. Схема пневмогидравлического автопилота

обратной связи: движение поршня сервомотора *9*, вызванное смещением золотника, обусловливает поворот рычага *7* вокруг шарнира *B* и при $a \neq 0$ — возврат золотника *8* в нейтральное положение. Курсовой мотор *2*, управляемый от датчика направления *3* (от магнитного компаса), устраняет отклонение самолета от заданного курса, возможное из-за уходов курсового гироскопа *1*.

Схема, изображенная на рис. В.6, весьма проста. Ее небольшие модификации приводят к схемам, реализующим законы регулирования (В.2), (В.3) и др. В современных автопилотах эти законы реализуются другими техническими средствами, но без какого-либо ущерба принципиальные вопросы можно рассматривать и на примере этой схемы.

Подобно обычному регулятору, любой автопилот состоит из чувствительных элементов, усилительно-преобразующей (промежуточной)

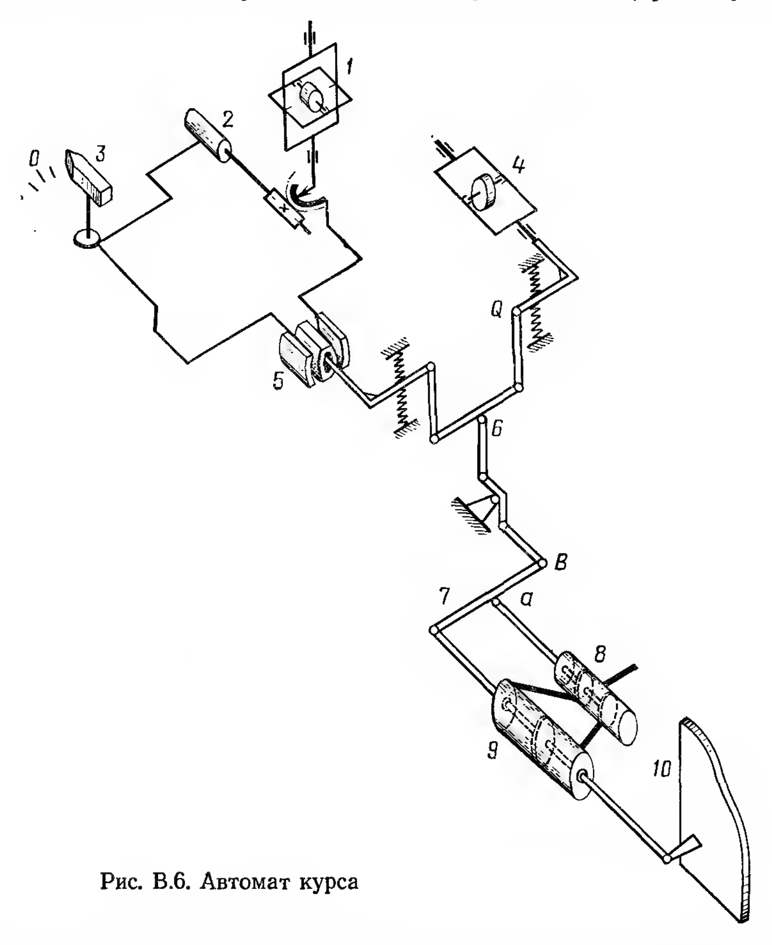


Рис. В.6. Автомат курса

части и силовой системы (рулевой машинки), отклоняющей исполнительный орган (руль), часто называемый управляющим органом. Например, в только что рассмотренной схеме (рис.В.6) чувствительными элементами являются курсовой гироскоп *1* и *ДУС 4*, роль силовой системы и управляющего органа выполняют сервомотор *9* и руль *10*. Все остальные элементы образуют промежуточную часть.

Промежуточная часть (поворотный электромагнитный механизм *5*, рычажные передачи *6* и *7*, золотник *8*) усиливает по мощности поступающие от чуствительных элементов сигналы и суммирует их с некото-

рыми весовыми коэффициентами. Во многих схемах промежуточная часть, помимо усиления и суммирования, дифференцирует и интегрирует входной сигнал, что позволяет обойтись одним гироскопическим чувствительным элементом (вместо двух). Для выполнения этих операций в промежуточную часть некоторых современных автопилотов вводятся цифровые вычислительные устройства.

Таким образом, под автопилотом понимают бортовую автоматическую систему угловой стабилизации объекта, включающую в себя чувствительные элементы, усилительно-преобразовательные устройства, сервопривод и управляющий орган.

По способу отработки отклонения различают автопилоты *прямой* и *перекрестной* схем [14]. В автопилоте прямой схемы сигнал отклонения объекта от заданного курса подается в канал руля направления, сигнал отклонения от заданного угла тангажа — в канал руля высоты, а сигнал отклонения по крену — в канал элеронов. Автопилоты прямой схемы используют в каналах стабилизации осесимметричных объектов (баллистические и зенитные ракеты), в каналах стабилизации самолета по углам тангажа и крена. Раньше автопилот прямой схемы применяли также для стабилизации самолета по углу рыскания. Отклонение руля направления вызывало появление угла скольжения и пропорциональной ему боковой аэродинамической силы, которая искривляла траекторию центра тяжести и изменяла угол рыскания. При этом самолет совершал плоский разворот, т. е. разворот при сохранении горизонтального положения крыльев.

Поскольку корпус и вертикальное оперение не могут создать боковой силы, достаточной для быстрого разворота тяжелого самолета, а также по соображениям большей комфортабельности для пассажиров и экипажа (ликвидация боковой инерционной силы), в настоящее время плоский разворот применяют только при выполнении самолетом специальных задач (например, при аэрофотосъемке). Во всех других случаях используют координированный разворот самолета, характеризующийся нулевым значением угла скольжения и, следовательно, отсутствием инерционной силы вдоль крыла.

При координированном развороте искривление траектории в горизонтальной плоскости осуществляется составляющей подъемной силы, специально создаваемой накренением самолета. В связи с этим при управлении курсом современного самолета роль управляющего органа в курсовом автопилоте выполняют элероны. Сигнал отклонения от заданного курса подается в канал элеронов, что вызывает крен самолета, появление горизонтальной составляющей подъемной силы и, следовательно, изменение угла рыскания. Такой автопилот называют автопилотом перекрестной схемы.

В настоящей книге рассматриваются только автопилоты прямой схемы. В принципиальном отношении материал книги в одинаковой мере относится к любому каналу стабилизации осесимметричного объекта и к каналам тангажа и крена самолета. Однако его изложение производится преимущественно на примерах канала курсовой стабилизации. Чтобы дать представление об истории развития автопилотов прямой схемы, в этих примерах используются и самолеты.

Глава I

АВТОПИЛОТЫ С РЕГУЛИРОВАНИЕМ ПО УГЛОВОМУ ОТКЛОНЕНИЮ

Представим себе летящий самолет, скорость которого по величине постоянна, а крылья все время горизонтальны. На рис. 1.1 показано некоторое мгновенное положение самолета. Воздушный поток, набегающий на самолет, противоположен скорости полета V. Обтекая корпус самолета (фюзеляж), этот поток у хвостового оперения получает направление, при котором горизонтальная проекция потока совпадает с продольной осью самолета.

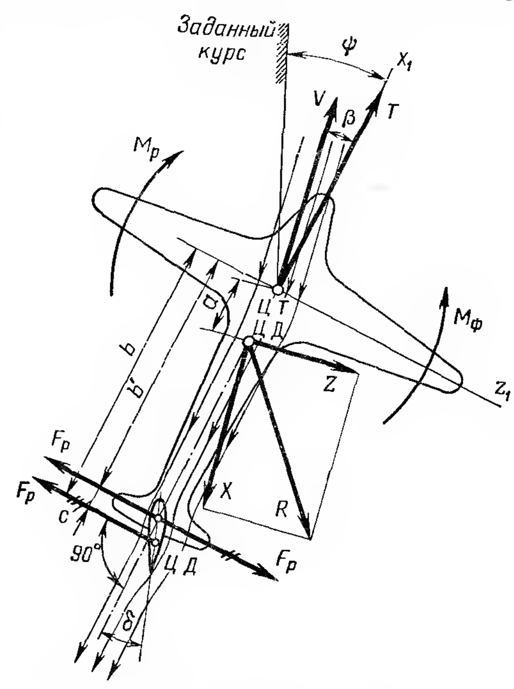


Рис. 1.1. Силы и моменты, действующие на самолет

На самолет действует воздушный поток, результирующая сила R которого приложена в некоторой вполне определенной точке—центре давления (ЦД). Вследствие симметрии самолета центр давления, как и ЦТ, располагается на продольной оси самолета (эти центры обычно не совпадают).

Результирующую аэродинамическую силу R раскладывают по двум взаимно перпендикулярным направлениям: по направлению вектора скорости **V** и направлению, перпендикулярному этому вектору. Проекцию на направление **V** называют *силой лобового сопротивления* и обозначают через X, а проекцию, перпендикулярную **V**, — *боковой аэродинамической силой* и обозначают через Z. Обе эти проекции при постоянном угле атаки зависят (не одинаковым образом) от угла β между вектором скорости **V** и продольной осью x_1, называемого *углом скольжения* (угол скольжения β выполняет ту же роль, что и угол атаки α в вертикальной плоскости самолета).

На руль, если он отклонен от нейтрального положения, действует составляющая аэродинамической силы $F_р$, направленная перпендикулярно набегающему потоку, который у хвостового оперения считается параллельным продольной оси самолета. Эта сила приложена в центре давления рулевой поверхности, обычно не совпадающем с осью вращения руля, и по величине прямо пропорциональна углу δ отклонения руля (при небольших отклонениях). Если к оси вращения руля приложить две одинаковые противоположно направленные силы (по величине равные $F_р$), линия действия которых параллельна вектору $\mathbf{F}_р$, то отмеченная штрихами пара сил (см. рис. 1.1) соответствует прикладываемому к рулевой поверхности со стороны воздушного потока моменту, называемому *шарнирным*. Оставшаяся сила $F_р$, приложенная к оси вращения руля, на плече b' создает момент $M'_р = F_р b'$ вокруг центра тяжести самолета. К этому моменту добавляется момент реакции на самолет со стороны рулевой машинки, по величине равный шарнирному моменту. Полный момент вокруг ЦТ самолета (момент от руля) есть $M_р = F_р b = C_2\delta$, где b — расстояние ЦТ самолета от линии действия силы $F_р$, приложенной в ЦД рулевой поверхности.

Сила лобового сопротивления X и, в особенности, боковая аэродинамическая сила Z на соответствующих плечах создают вокруг ЦТ самолета момент $M_ф = C_1\beta$, называемый *флюгерным* (называется также моментом путевой устойчивости). Этот момент пропорционален углу скольжения β. Направление флюгерного момента зависит от расположения центра давления относительно центра тяжести. Если ЦД ближе к хвосту объекта, чем ЦТ, то при небольшом диапазоне изменения β флюгерный момент $M_ф$ стремится совместить продольную ось объекта с вектором скорости $\mathbf{V}$. В этом случае объект *статически устойчив*. Если ЦТ ближе к хвосту, чем ЦД, то объект *статически неустойчив*. В этом случае флюгерный момент стремится опрокинуть объект, т. е. поставить его хвостом по направлению полета. Обычно самолеты статически устойчивы, а большие баллистические ракеты — статически неустойчивы.

При совпадении ЦД с ЦТ летательный аппарат называется *нейтральным*, так как он не имеет тенденции ни к установлению по потоку, ни к опрокидыванию.

Скорость полета V по величине постоянна только в том случае, когда сила лобового сопротивления X в любой момент времени уравновешивается составляющей $T \cos\beta$ силы тяги T двигателя. При постоянной тяге ($T = \text{const}$) это уравновешивание, в принципе, невозможно. Однако при малых углах скольжения β изменения скорости незначительны и при исследовании систем стабилизации курса ими можно пренебречь. Постоянство скорости V обеспечивает неизменность коэффициентов пропорциональности C_1, C_2, входящих в выражения флюгерного момента и момента от руля. Эти коэффициенты определяются формулами [7]:

$$C_1 = \rho \frac{V^2}{2} SL \left| m_y^{\beta} \right|; \quad C_2 = \frac{\rho V^2}{2} S_р b \frac{\partial c_{zр}}{\partial \delta}, \qquad (1.1)$$

где ρ — плотность атмосферы; S, L — характерные площадь и длина объекта; $m_y^\beta = \partial m_y / \partial \beta$ — производная коэффициента момента рыскания по углу скольжения (для статически устойчивого объекта $m_y^\beta < 0$, для статически неустойчивого $m_y^\beta > 0$); $S_р$ — площадь рулевой поверхности; $\partial c_{zр} / \partial \delta$ — производная коэффициента боковой силы рулевой поверхности по углу ее отклонения от нейтрального положения (параметры b и l см. на рис. 1.1). В дальнейшем коэффициенты C_1, C_2 считаются положительными.

По месту расположения руля объекты делятся на два класса. I класс — это объекты с расположением руля *по нормальной схеме* (руль размещается у кормы, см. рис. 1.1). II класс — объекты с расположением руля по схеме «утка» (руль смонтирован у носка объекта — см. рис. 1.8). При любой схеме расположения руля объект может быть как статически устойчивым, так и статически неустойчивым.

§ 1.1. СИСТЕМА «СТАТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЙ ОБЪЕКТ — ГИПОТЕТИЧЕСКИЙ АВТОПИЛОТ»

Вид структурной схемы системы «объект — автопилот» зависит от принятой математической модели объекта, т. е. от того, сколь полно учтены различные факторы, влияющие на движение объекта. Предельно упрощая задачу, можно объект, совершающий рыскание, представить в виде системы с одной степенью свободы. При более полном учете сил объект представляют системой с двумя степенями свободы. Если же учесть взаимосвязь колебаний вокруг трех осей объекта и их зависимость от движения ЦТ, то даже при условии рассмотрения объекта как абсолютно твердого тела он представляется системой с шестью степенями свободы и описывается системой дифференциальных уравнений двенадцатого порядка. Учет степеней свободы, соответствующих изгибным колебаниям, колебаниям жидкого наполнения баков, относительному движению исполнительных органов и др., значительно повышает порядок уравнений объекта.

Уравнения и структурная схема при объекте с одной степенью свободы. Выведем уравнения движения системы «самолет — гипотетический автопилот» (см. рис. В.2), состоящей из двух звеньев направленного действия. Одним звеном является самолет, другим — гироскоп и кинематически связанный с ним руль. Уравнения составляются порознь для каждого звена направленного действия.

Рассмотрим сначала первое звено, т. е. самолет. Примем следующую математическую модель самолета:

1) самолет — это абсолютно твердое тело с неизменной массой;

2) движение самолета происходит в горизонтальной плоскости (угол между плоскостью $x_1 z_1$ крыльев и горизонтальной плоскостью не изменяется);

3) скорость центра тяжести как по величине, так и по направлению постоянна (траектория ЦТ прямолинейна и совпадает с линией заданного курса);

4) объект статически устойчив.

В этих предположениях состояние самолета полностью определяется двумя координатами: расстоянием x центра тяжести вдоль прямолинейной траектории от места старта и углом отклонения ψ продольной оси от заданного курса. Поскольку скорость V считается известной, координата x также известна в любой момент времени (она определяется конечным уравнением $x = Vt$). Единственной координатой, протекание которой во времени неизвестно, является угол рыскания ψ. Для определения этой координаты требуется составить только одно дифференциальное уравнение. Поэтому самолет можно рассматривать как тело с одной степенью свободы, характеризуемой координатой ψ.

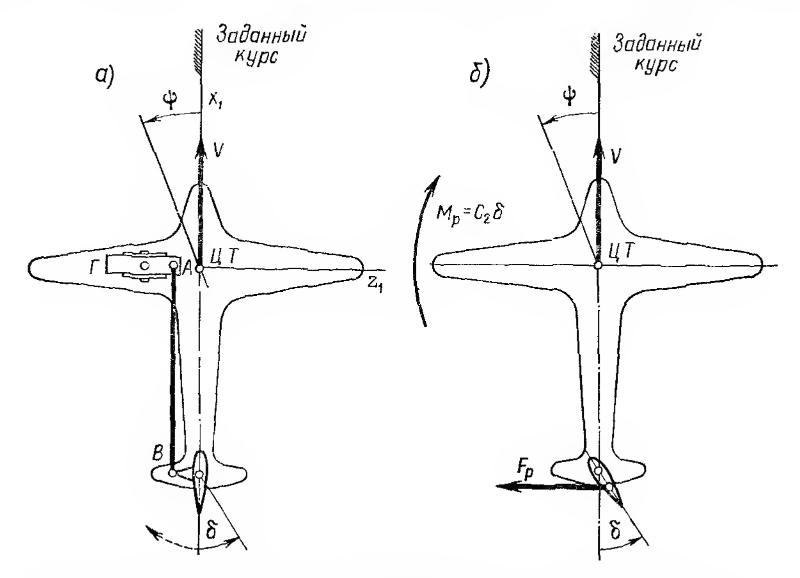


Рис. 1.2. Силы и моменты, возникающие при положительном угле δ

Прежде чем составлять уравнения, следует выбрать направления положительного отсчета для всех координат замкнутой системы (в данном случае для углов ψ и δ). Этот выбор, вообще говоря, произволен. Тем не менее в процессе составления уравнений выбранные направления отсчета должны строго учитываться. В качестве первого варианта примем для углов ψ, δ направления положительного отсчета, отмеченные на рис. 1.2, *а* сплошными стрелками.

Каждое звено направленного действия может иметь одну или несколько входных величин (переменных) и одну выходную величину (переменную). Для самолета входной величиной является угол δ отклонения руля, а выходной — угол рыскания ψ. Общее правило составления уравнения любого звена, если оно имеет механическую природу, заключается в следующем. Считаем все переменные (координаты), являющиеся входными по отношению к рассматриваемому

звену, а также координаты самого звена, от которых зависят силы и моменты, отклоненными в положительном направлении отсчета. На основании законов механики связываем эти координаты с вызванным ими отклонением выходной переменной рассматриваемого звена, учитывая при этом направление положительного отсчета выходной переменной. Аналитическое выражение, характеризующее эту связь, является уравнением рассматриваемого звена.

Выведем согласно сформулированному правилу уравнение движения самолета. Так как входная величина самолета δ должна приниматься положительной, считаем, что руль отклонен в положительном направлении отсчета, т. е. как показано на рис. 1.2, *б*. Тогда при учете положительного направления отсчета ψ на основании второго закона Ньютона

$$J\ddot{\psi} = -C_2\delta - D\dot{\psi} - C_1\psi + m. \qquad (1.2а)$$

Здесь m — внешний возмущающий момент (возникает, например, вследствие несимметричности тяги двигателей), J — момент инерции самолета относительно его вертикальной оси, проходящей через центр тяжести, D — коэффициент аэродинамического демпфирования, C_1 и C_2 — рассмотренные ранее коэффициент флюгерного момента и коэффициент эффективности руля.

Так как коэффициенты C_1, C_2, D считаются положительными, в выражении (1.1) фигурирует абсолютное значение $|m_y^\beta|$. Знаки перед отдельными членами уравнения (1.2) получаются следующим образом. При положительном отклонении δ руль создает вокруг ЦТ самолета момент $C_2\delta$, ускоряющий самолет, как это видно из рис. 1.2, *б*, в направлении отрицательного отсчета ψ, т. е. момент, создающий отрицательное ускорение $\ddot{\psi}$ (направления положительного отсчета $\dot{\psi}$ и $\ddot{\psi}$ совпадают с направлением положительного отсчета ψ). Чтобы в уравнении (1.2) отразить это обстоятельство (переход положительной величины $C_2\delta$ в отрицательную $J\ddot{\psi}$), необходимо в правой части уравнения перед членом $C_2\delta$ поставить знак минус.

Знак перед членом $C_1\psi$ обосновывается аналогичным образом. При положительном угле рыскания ψ возникает флюгерный момент $C_1\psi$, направленный благодаря статической устойчивости самолета в сторону уменьшения ψ. Этот момент ускоряет самолет в направлении отрицательного отсчета ψ, вследствие чего он должен быть взят в правой части (1.2) со знаком минус. Момент аэродинамического демпфирования $D\dot{\psi}$ по своему действию аналогичен моменту сил вязкого трения, т. е. всегда препятствует движению. При положительной скорости $\dot{\psi}$ он создает ускорение самолета в отрицательном направлении отсчета ψ и поэтому в правой части (1.2) должен фигурировать со знаком минус. Знак возмущающего момента m определяется направлением производимого им ускорения самолета.

Составим уравнение звена «гироскоп — руль». Для этого звена примем следующую математическую модель. Считаем, что кинетический момент гироскопа настолько велик, что шарнирный момент руля,

редуцируемый на гироскоп через тягу AB, не вызывает существенной прецессии гироскопа и не влияет на угловое положение кольца $Г$.

Входная величина звена — угол рыскания ψ, выходная — угол отклонения руля δ. Будем считать, что входная величина ψ имеет положительное значение (рис. 1.3). Тогда кольцо $Г$ повернуто относительно самолета на угол $\psi_1 = \psi$, тяга AB смещена в направлении хвоста самолета на величину $l\psi$ (при малом угле ψ), а руль повернут в сторону положительного отсчета δ на угол $l\psi/r$. Таким образом,

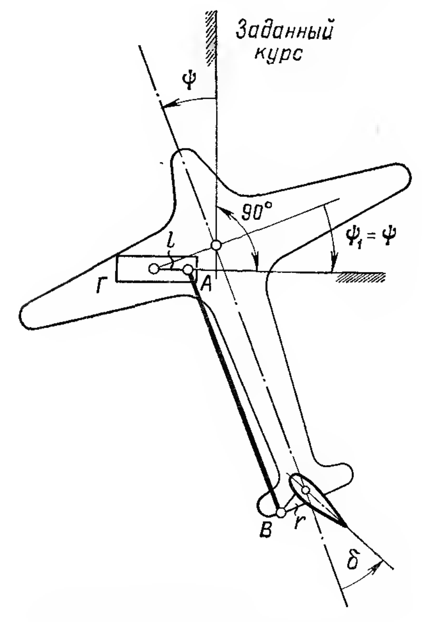


Рис. 1.3. Отклонение руля при положительном угле ψ

$$\delta = l\psi/r. \qquad (1.2б)$$

Уравнения (1.2 а, б), описывающие поведение рассматриваемой системы «самолет — автопилот», после введения обозначения $l/r = a_0$ можно переписать в следующем виде:

$$J\ddot{\psi} + D\dot{\psi} + C_1\psi = -C_2\delta + m;$$
$$\delta = a_0\psi. \qquad (1.3)$$

Принятый выше выбор направлений положительного отсчета переменных (сплошные стрелки на рис. 1.2, *а*) не является единственно возможным. Можно, например, при прежнем направлении отсчета ψ выбрать в качестве направления положительного отсчета δ противоположное направление (на рис. 1.2, *а* показано пунктирной стрелкой). Тогда, составляя уравнения обоих звеньев по прежнему правилу, получим

$$J\ddot{\psi} + D\dot{\psi} + C_1\psi = C_2\delta + m; \; \delta = -a_0\psi. \qquad (1.4)$$

Сравнивая (1.3) с (1.4), видим, что выбор направлений положительного отсчета переменных влияет на знаки перед отдельными членами уравнений. Однако если системы (1.3) и (1.4) свести соответственно к одному уравнению, например, относительно ψ, то в обоих случаях получим одно и то же уравнение: $J\ddot{\psi} + D\dot{\psi} + (C_1 + C_2a_0)\psi = m$.

Это доказывает, что совершенно безразлично основывать ли анализ замкнутой системы на уравнениях (1.3) или на уравнениях (1.4).

Однако общесоюзный стандарт (ГОСТ 1075—41) предусматривает использование правых систем координат и вполне определенные направления отсчета углов рыскания, тангажа, крена и углов отклонения рулей. Согласно ГОСТу угол рыскания ψ и угол δ отклонения руля направления положительны, когда при наблюдении с положительного конца вертикальной оси y_1 самолета (см. рис. 1.2, *а*) получаем эти углы

вращением соответствующих тел (самолета, руля) против часовой стрелки. Следовательно, по ГОСТу положительными являются углы ψ, δ, показанные на рис. 1.2, *а* сплошными стрелками. Поэтому в дальнейшем будем основываться на уравнениях (1.3).

Чтобы составить структурную схему системы «самолет — автопилот», преобразуем по Лапласу уравнения (1.3) при нулевых начальных условиях*. Разрешив каждое из уравнений относительно выходной величины соответствующего звена, получим:

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{Js^2 + Ds + C_1}\,[-C_2\hat{\delta}(s) + M(s)], \quad \hat{\delta} = a_0\hat{\psi}(s). \qquad (1.5)$$

Структурная схема, составленная на основании уравнений (1.5), показана на рис. 1.4. Цепь — a_0C_2, связывающая координату $\hat{\psi}$ с точкой приложения момента M (цепь обратной связи), не содержит ин-

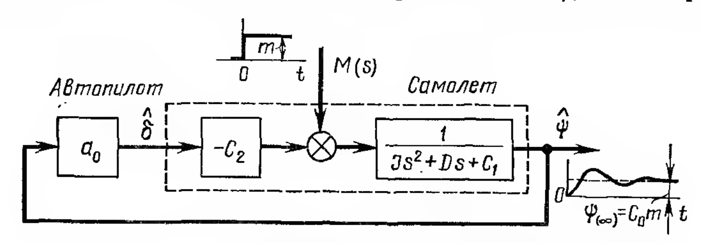


Рис. 1.4. Структурная схема системы «статически устойчивый самолет — гипотетический автопилот»

тегрирующего звена $1/s$. Это обусловливает недостаток системы, заключающийся в статизме регулирования по углу рыскания ψ в отношении действующего на самолет возмущающего момента m. Статизм регулирования выражается в том, что после затухания свободных колебаний, т. е. в установившемся состоянии, самолет оказывается отклоненным от заданного курса на величину, пропорциональную возмущающему моменту $m = \text{const}$ (рис. 1.4). Коэффициент пропорциональности C_0, называемый *коэффициентом статизма регулирования*, равен передаточной функции $\Phi(s) = \hat{\psi}/M$ замкнутой системы при подстановке $s = 0$. Из структурной схемы на рис. 1.4 получаем

$$C_0 = \Phi(0) = \left\{\frac{1}{(Js^2 + Ds + C_1)} \Bigg/ \left[1 + \frac{a_0C_2}{Js^2 + Ds + C_1}\right]\right\}_{s=0} = \frac{1}{C_1 + a_0C_2}. \qquad (1.6)$$

Чем больше коэффициент статизма C_0, тем меньше точность стабилизации самолета на заданном курсе. Чтобы уменьшить коэффициент C_0 и тем самым повысить статическую точность системы стабилизации, необходимо, как это видно из (1.6), повышать коэффициент усиления a_0 автопилота.

* Оригиналы обозначаются здесь строчными буквами, в то время как соответствующие им изображения — прописными буквами или строчными, но со знаком $\wedge$ сверху.

Уравнения и структурная схема при объекте с двумя степенями свободы. Примем математическую модель самолета, более полно учитывающую действующие силы. Будем считать, что вектор скорости центра тяжести остается неизменным по величине, а его направление может меняться. Это приближает математическую модель самолета к действительности, так как существуют боковые силы, производящие отклонение вектора скорости самолета. Предположение о статической устойчивости и другие принятые в разделе I предположения оставим без изменения.

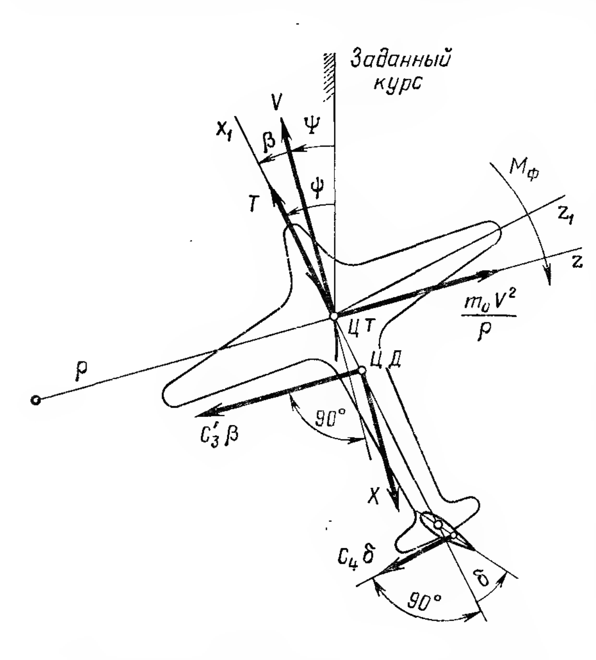


Рис. 1.5. Система сил, действующих на самолет при положительных отклонениях координат

При новых предположениях самолет представляет собой тело с двумя степенями свободы, т. е. его положение определяется двумя координатами*. Первая координата — угол рыскания, вторая — боковое смещение ЦТ от заданной путевой линии. Поэтому для описания движения самолета необходимы два дифференциальных уравнения: уравнение баланса моментов вокруг ЦТ самолета (уравнение моментов) и уравнение баланса сил, действующих перпендикулярно вектору скорости **V** (уравнение боковых сил).

Переменными, характеризующими состояние самолета, будем считать отклонение ψ продольной оси от заданного курса (угол рыскания) и угол Ψ, составляемый вектором скорости с направлением заданного курса (угол поворота траектории). Задание угла Ψ равноценно заданию линейного бокового смещения z_0 центра тяжести, так как $z_0 = \int V \sin \Psi dt$, где $V = \text{const}$ — известная величина. Кроме указанных, введем в рассмотрение угол скольжения β, полностью определяемый заданием углов ψ и Ψ (рис. 1.5).

Положительные направления отсчета угла рыскания ψ, угла поворота траектории Ψ (отсчитывается от направления заданного курса

*Строго говоря, самолет имеет три степени свободы и характеризуется тремя координатами. Но одна из координат (расстояние ЦТ вдоль путевой линии от места старта) определяется по двум другим без решения дифференциального уравнения.

к вектору скорости **V**), угла скольжения β (отсчитывается от вектора скорости к продольной оси) и угла отклонения руля δ примем согласно ГОСТу, т. е. против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси y_1 самолета.

Чтобы составить уравнения движения самолета, будем считать, что входная переменная δ и координаты самолета ψ, Ψ, β имеют положительные значения (рис. 1.5). При этом условии составим уравнение баланса сил вдоль направления, перпендикулярного вектору скорости **V**, и уравнение баланса моментов, действующих вокруг ЦТ самолета.

Принимая во внимание рис. 1.5, запишем уравнение боковых сил

$$m_0 V^2/\rho = C_3'\beta + C_4\delta\cos\beta + T\sin\beta,$$

где m_0 — масса самолета; ρ — радиус кривизны траектории. Согласно этому уравнению центробежная сила m_0V^2/ρ уравновешивается боковой аэродинамической силой $C_3'\beta$ корпуса самолета и проекциями на нормаль к траектории аэродинамической силы на руле $C_4\delta$ и силы тяги двигателя T.

Коэффициенты пропорциональности:

$$C_3' = \frac{\rho V^2}{2} S\,|c_z^\beta|, \quad C_4 = \frac{\rho V^2}{2} S_p \frac{\partial c_{zp}}{\partial\delta},$$

где $c_z^\beta = \partial c_z/\partial\beta$ — производная коэффициента аэродинамической боковой силы по углу скольжения.

При положительном угле скольжения β возникает, как это видно из рис. 1.5, аэродинамическая сила Z, действующая в отрицательном направлении оси z. Поскольку в аэродинамике вектор **Z** формально направляют в положительном направлении оси z, в выражении $Z = \rho\frac{V^2}{2}Sc_z^\beta\beta$ принимают $c_z^\beta < 0$. Коэффициент C_3' (так же, как и коэффициент C_4) считается здесь положительным. Поэтому в выражении этого коэффициента фигурирует $|c_z^\beta|$.

Принимая во внимание, что V/ρ есть скорость поворота радиуса ρ и, следовательно, перпендикулярного ему вектора **V**, т. е. $V/\rho = \dot\Psi$, и учитывая малость угла скольжения β ($\cos\beta \approx 1$, $\sin\beta \approx \beta$), получим

$$m_0V\dot\Psi = C_3\beta + C_4\delta, \tag{1.7}$$

где $C_3 = C_3' + T$.

Составим теперь уравнение моментов. Воспользовавшись изложенной в § 1.1 методикой, получим

$$J\ddot\psi = -C_2\delta - C_1\beta - D\dot\psi + m. \tag{1.8}$$

Это уравнение отличается от уравнения (1.2а) лишь флюгерным моментом, зависящим теперь от угла скольжения.

К уравнениям (1.7) и (1.8) следует добавить уравнение

$$\psi = \Psi + \beta, \tag{1.9}$$

вытекающее из представленной на рис. 1.5 геометрической картины.

При соблюдении принятых предположений самолет представляет собой тело с двумя степенями свободы и для характеристики его положения достаточно двух координат. Но в уравнениях (1.7) и (1.8) три координаты ψ, Ψ, β, не считая переменной δ, являющейся для самолета внешним входным воздействием. Поскольку эти координаты связаны геометрическим соотношением $\psi = \Psi + \beta$, лишь две из них являются независимыми, т. е. число независимых координат, как и должно быть, равно числу степеней свободы.

Дальнейшее уточнение математической модели самолета могло бы состоять в учете связи между колебаниями рыскания и крена, учете гироскопических сил и т. д. Однако при решении многих задач можно обойтись уравнениями (1.7) $\div$ (1.9).

Принимая автопилот в виде гироскопа и руля, кинематически связанных при помощи тяги AB (см. рис. 1.3), получим следующее уравнение автопилота:

$$\delta = a_0\psi. \qquad (1.10)$$

На основании уравнений (1.7) $\div$ (1.9) можно составить передаточные функции самолета $\hat{\psi}/\hat{\delta}$, $\hat{\Psi}/\hat{\delta}$, $\hat{\beta}/\hat{\delta}$. Поскольку автопилот предназначен для угловой стабилизации продольной оси по заданному курсу, интерес представляет передаточная функция $\hat{\psi}/\hat{\delta}$. Исключая из уравнений (1.7) $\div$ (1.9), предварительно преобразованных по Лапласу, переменные $\hat{\Psi}$ и $\hat{\beta}$, получим

$$\hat{\psi} = \frac{1}{s\,[JVm_0 s^2 + (JC_3 + DVm_0)\, s + (C_1 Vm_0 + DC_3)]} \times$$

$$\times \{-[C_2 Vm_0 s + (C_2 C_3 - C_1 C_4)]\,\hat{\delta} + (Vm_0 s + C_3)\, M\}. \qquad (1.11)$$

Структурная схема системы «самолет — автопилот», составленная на основании уравнений (1.10) и (1.11), показана на рис. 1.6, *а*, а после приведения к стандартной форме — на рис. 1.6, *б*.

Несмотря на наличие в звене A, представляющем со звеньями B и C самолет, интегрирующего звена $1/s$, по углу рыскания ψ в отношении действующего на самолет возмущающего момента m осуществляется статическое регулирование. Это объясняется тем, что интегрирующее звено содержится в прямой цепи замкнутой системы, а для осуществления астатического регулирования оно должно находиться в цепи обратной связи, т. е. в цепи, связывающей координату $\hat{\psi}$ с точкой приложения к замкнутому контуру возмущения M. В данном случае передаточная функция цепи обратной связи имеет вид $-a_0\,(C_2 m_0 Vs + C_2 C_3 - C_1 C_4)$, т. е. множителя $1/s$ не содержит.

Таким образом, учет действия боковой аэродинамической силы и других нормальных к траектории сил не изменяет вывода о наличии у системы «самолет — гипотетический автопилот» статизма регулирования по углу рыскания ψ в отношении возмущающего момента m $[M(s) = L(m)]$. Коэффициент статизма регулирования можно получить, составив по рис. 1.6, *а* передаточную функцию $\hat{\psi}/M$ замкнутой системы и положив в ней $s = 0$.

Имеем

$$C_0 = \hat{\psi}/M\,|_{s=0} = C_3/[a_0\,(C_2\,C_3 - C_1\,C_4)]. \qquad (1.12)$$

Это выражение показывает, что в установившемся состоянии автопилот удерживает самолет на заданном курсе тем точнее, чем больше передаточное число автопилота a_0.

Учитывая, что для всех объектов $C_2C_4 - C_1C_4 > 0$ и что для статически устойчивых объектов корни квадратичного трехчлена в знаменателе звена A комплексные сопряженные (вследствие малости коэф-

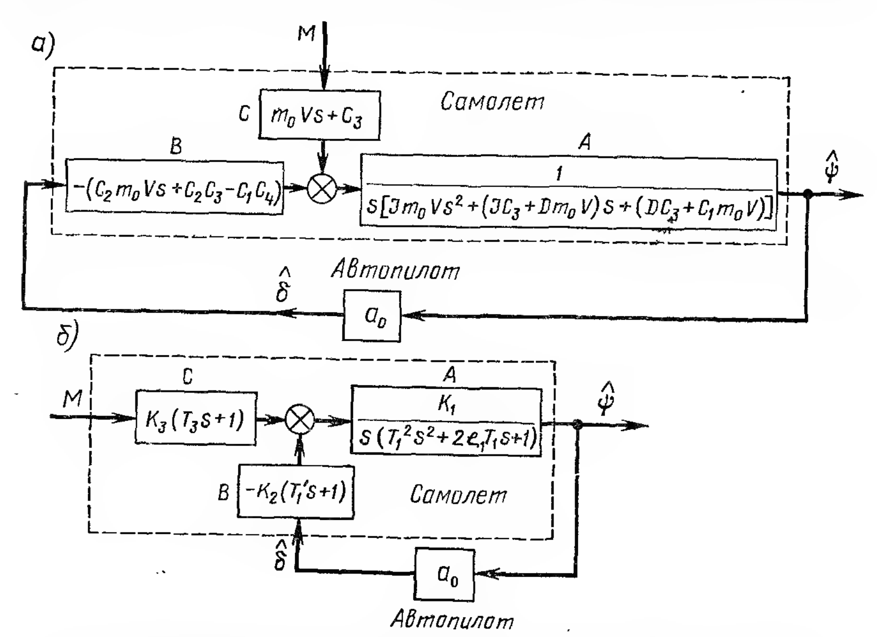


Рис. 1.6. Структурная схема системы «самолет — автопилот» при учете действия боковых сил до (*а*) и после (*б*) приведения к стандартной форме

фициента аэродинамического демпфирования D), можно структурную схему, изображенную на рис. 1.6, *а*, привести к стандартному виду, показанному на рис. 1.6, *б*. Как известно, приведение передаточной функции к стандартному виду заключается в разложении числителя и знаменателя на элементарные множители (в звеньях схемы на рис. 1.6, *а* это уже выполнено) и вынесении свободных членов элементарных сомножителей за скобку. В результате получают коэффициенты усиления K, постоянные времени T и относительный коэффициент демпфирования ζ звеньев, имеющие для статически устойчивого объекта следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &K_1 = 1/(C_1 m_0 V + DC_3), \quad T_1 = \sqrt{Jm_0 V/(C_1 m_0 V + DC_3)},\\ &K_2 = C_2 C_3 - C_1 C_4, \quad T_1' = C_2 m_0 V/(C_2 C_3 - C_1 C_4),\\ &K_3 = C_3, \quad T_3 = m_0 V/C_3,\\ &\zeta_1 = (JC_3 + Dm_0 V)/\left[2\sqrt{Jm_0 V\,(C_1 m_0 V + DC_3)}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

Обычно относительный коэффициент демпфирования ζ_1 весьма мал и составляет величину порядка 0,1.

Уравнения и структурная схема при объекте с расположением руля по схеме «утка». В рассмотренных выше схемах (рис. В.2 и 1.5) использованы объекты с нормальным расположением руля. Принимая в отношении объекта те же предположения, что и в разделе 2 (объект с двумя степенями свободы), составим уравнения движения системы «самолет—гипотетический автопилот» для случая, когда руль размещен впереди центра тяжести, т. е. у носка объекта (объект с расположением руля по схеме «утка»). Такое расположение руля встречается в малогабаритных объектах (зенитные управляемые ракеты), что объясняется удобством размещения аэродинамического управляющего органа в непосредственной близости от приборного отсека, находящегося в головной части ракеты.

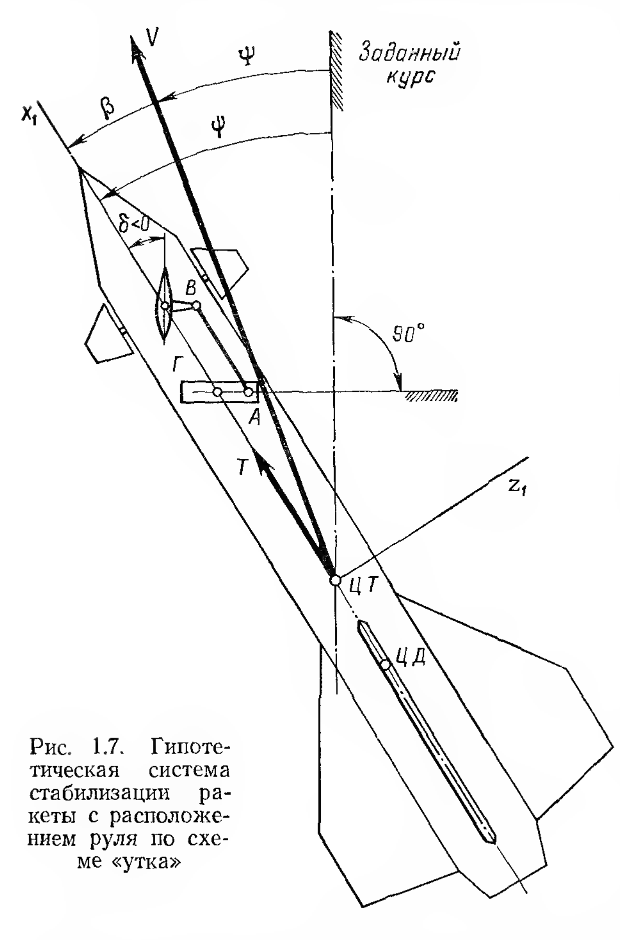


Рис. 1.7. Гипотетическая система стабилизации ракеты с расположением руля по схеме «утка»

Обычно малогабаритные ракеты обладают достаточным хвостовым оперением и, следовательно, статически устойчивы. В дальнейшем предполагаем наличие у объекта статической устойчивости. Направления положительного отсчета углов примем, как показано на рис. 1.7 (руль изображен здесь в положении $\delta < 0$).

Уравнения объекта можно составить, основываясь на рис. 1.8, где показаны силы и моменты, возникающие при положительном отклонении руля δ и положительном углё скольжения β.

Уравнение баланса сил в направлении нормали к траектории (уравнение боковых сил) имеет вид (рис. 1.8)

$$m_0 V^2/\rho = C_3'\beta + C_4(\delta + \beta) + T\sin\beta.$$

С учетом $V/\rho = \dot{\Psi}$ и малости β его можно переписать в виде

$$m_0 V \dot{\Psi} = C_3\beta + C_4\delta, \tag{1.14}$$

где $C_3 = C_3' + C_4 + T$.

Как видно из рис. 1.8, уравнение моментов

$$J\ddot{\psi} = bC_4(\delta + \beta) - C_1'\beta - D\dot{\psi} + m.$$

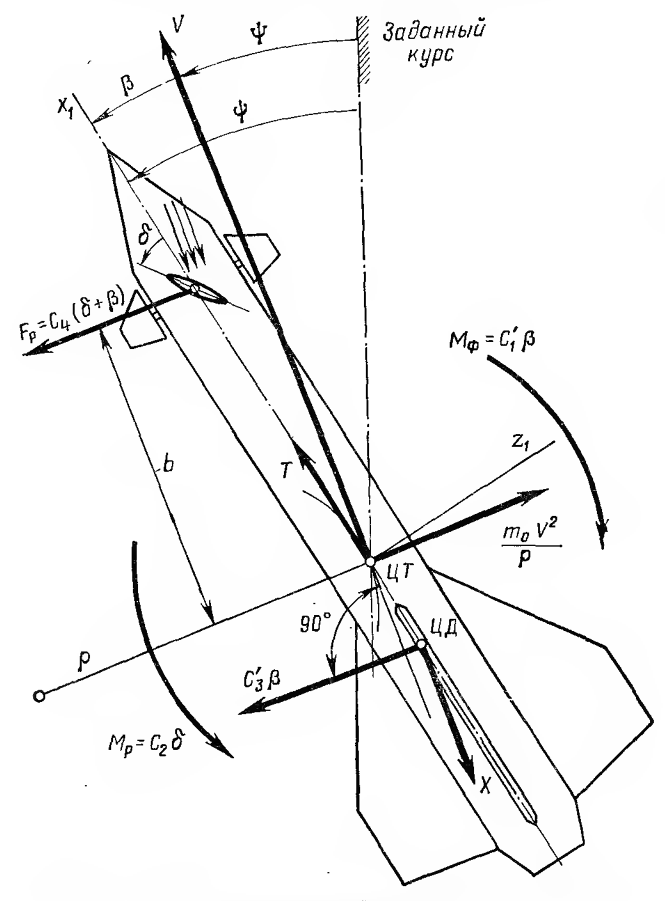


Рис. 1.8. Силы и моменты, действующие на ракету при положительных углах δ, β

Введя обозначения $C_2 = C_4 b$, $C_1 = C_1' - C_2$, имеем

$$J\ddot{\psi} + D\dot{\psi} + C_1\beta = C_2\delta + m. \tag{1.15}$$

Полную систему уравнений объекта получим добавлением к (1.14), (1.15) геометрического соотношения между углами

$$\psi = \Psi + \beta. \tag{1.16}$$

Уравнение автопилота имеет согласно рис. 1.7 следующий вид:

$$\delta = -a_0\psi. \qquad (1.17)$$

Структурная схема всей системы, соответствующая уравнениям (1.14) $\div$ (1.17), может быть получена из схемы на рис. 1.6, *а* изменением знака перед C_2 и a_0 на обратный (рис. 1.9). Структурная схема, приведенная к стандартной форме, показана на рис. 1.10.

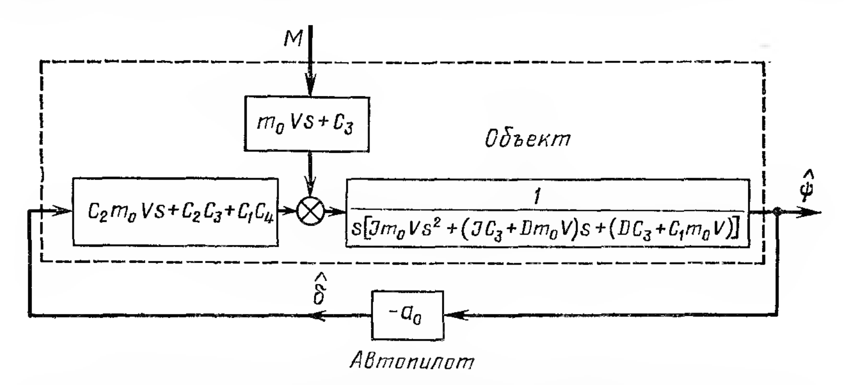


Рис. 1.9. Структурная схема системы «объект — автопилот» при расположении руля согласно схеме «утка»

При одинаковости параметров m_0, V, D, C_2, C_3, C_4 объект с расположением рулей по схеме «утка» имеет больший коэффициент усиления $K_{об} = \hat{\psi}/\hat{\delta}\,|_{s=0} = (C_2C_3 + C_1C_4)/(C_1m_0V + DC_3)$ (рис. 1.9), чем объект с расположением рулей по нормальной схеме $K_{об} = (C_2C_3 - C_1C_4)/(C_1m_0V + DC_3)$ (рис. 1.6, *а*).

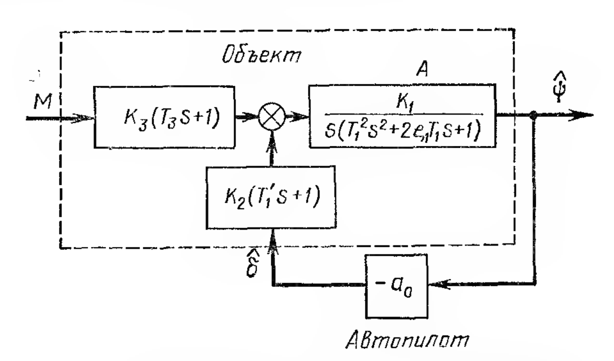


Рис. 1.10. Структурная схема в стандартной форме

По этой причине коэффициент статизма регулирования C_0 всей системы в случае расположения рулей по схеме «утка» при прочих равных условиях будет несколько меньше, чем в случае расположения рулей по нормальной схеме.

§ 1.2. СИСТЕМА «СТАТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЙ ОБЪЕКТ — ГИПОТЕТИЧЕСКИЙ АВТОПИЛОТ»

Относительно объекта сохраним все сделанные в § 1.1 предположения, за исключением четвертого. А именно, будем теперь считать объект статически неустойчивым. Примером статически неустойчивых объектов могут служить баллистические ракеты, имеющие относительно небольшое хвостовое оперение.

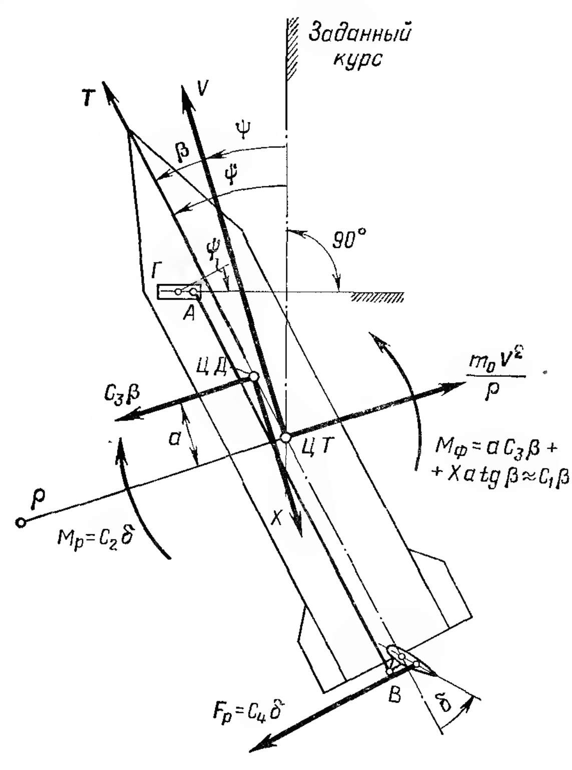


Рис. 1.11. Силы и моменты, действующие на статически неустойчивую ракету при положительных отклонениях δ и β

В указанных предположениях объект попрежнему имеет две степени свободы и описывается уравнением боковых сил и уравнением моментов. В дальнейшем принимаем, что рули расположены по нормальной схеме.

Выбрав в качестве направлений положительного отсчета координат направления, отмеченные на рис. 1.11 стрелками, можно получить согласно изложенной в § 1.1 методике следующие уравнения объекта. Уравнение боковых сил

$$m_0V\dot{\Psi} = C_3\beta + C_4\delta. \quad (1.18)$$

Уравнение моментов

$$J\ddot{\psi} = -C_2\delta + C_1\beta - D\dot{\psi} + m. \quad (1.19)$$

Геометрическая связь

$$\psi = \Psi + \beta. \quad (1.20)$$

Уравнение автопилота, вытекающее из рис. 1.11, имеет вид

$$\delta = a_0\psi. \quad (1.21)$$

Структурная схема системы «объект — автопилот», соответствующая уравнениям (1.18) — (1.21), отличается от схемы на рис. 1.6, *а*

лишь знаком перед C_1 (рис. 1.12). Поскольку $DC_3 - C_1 m_0 V < 0$, трехчлен знаменателя передаточной функции звена A имеет два действительных корня, один из которых отрицательный, а другой — по-

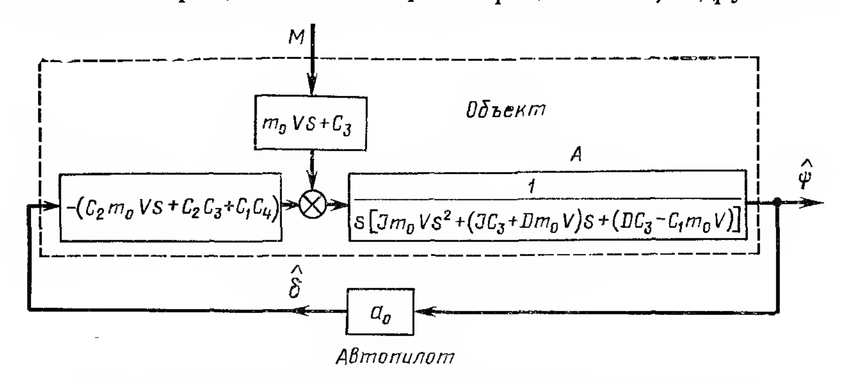


Рис. 1.12. Структурная схема системы «статически неустойчивый объект — гипотетический автопилот»

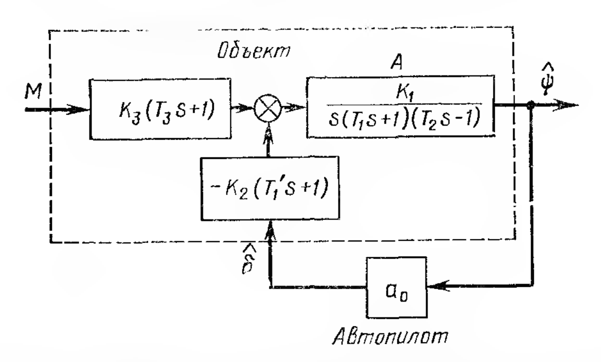


Рис. 1.13. Структурная схема системы «статически неустойчивый объект — гипотетический автопилот» в стандартной форме

ложительный. Следовательно, звено A состоит из интегрирующего K_1/s, апериодического $1/(T_1 s + 1)$ и неустойчивого апериодического $1/(T_2 s - 1)$ звеньев. В стандартной форме структурная схема изображена на рис. 1.13.

§ 1.3. СИСТЕМА «ОБЪЕКТ — АВТОПИЛОТ С ЖЕСТКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ»

Чтобы наружное кольцо Γ курсового гироскопа с большой точностью сохраняло свое угловое положение в пространстве, оно не должно испытывать внешних возмущающих моментов. Поэтому в реальных автопилотах гироскоп выполняет лишь роль прецизионного измерителя угла ψ, а его показания трансформируются в угол δ отклонения руля с помощью силовой следящей системы. Входным сигналом следящей системы служит угол ψ_1 отклонения кольца гироскопа относительно

корпуса объекта, а выходным — отклонение δ руля также относительно корпуса объекта.

Схема такого автопилота может быть получена из схемы на рис. В.6 путем жесткого соединения шарнира Q с корпусом объекта. Отвлекаясь от деталей, принципиальную схему получившегося автопилота в режиме стабилизации заданного курса можно представить, как показано на рис. 1.14. Следящая система состоит здесь из золотникового устройства *з*, рулевой машинки *РМ* и рычажного дифференциала *BD*.

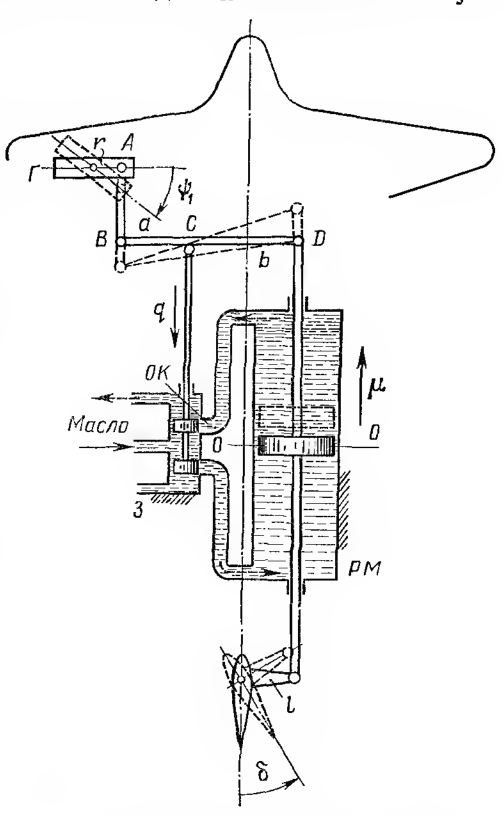


Рис. 1.14. Система «самолет — автопилот с жесткой обратной связью»

При отклонении объекта от заданного курса в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол ψ гироскоп *Г* поворачивается относительно корпуса объекта по часовой стрелке на такой же угол $\psi_1 = \psi$ и через тягу *AB* поворачивает коромысло *BD*. Поворот коромысла происходит вокруг точки *D*, так как сила, необходимая для смещения связанного с этой точкой поршня сервопривода, значительно превосходит силу, требующуюся для смещения золотника. Золотник, смещаясь от нейтрального положения вниз, открывает окна *ОК* золотниковой коробки. Поршень сервопривода под действием появившегося перепада давлений движется вверх. Сила, требующаяся для смещения связанной с гироскопом точки *B*, значительно больше силы, необходимой для смещения золотника. Поэтому поворот коромысла, вызванный перемещением поршня, происходит вокруг точки *B*, что влечет за собой возвращение золотника в нейтральное положение (отрицательная обратная связь).

По завершении процесса установления, вызванного сигналом $\psi = \text{const}$, элементы следящей системы занимают следующее положение. Гироскоп *Г* отклонен относительно объекта на угол $\psi_1 = \psi = \text{const}$, золотник находится в нейтральном положении и полностью перекрывает оба окна *ОК* золотниковой коробки. Поршень сервопривода, будучи неподвижен, занимает относительно срединной линии цилиндра более высокое положение ($\mu = \text{const} > 0$), вследствие чего руль отклонен вправо на угол $\delta = \text{const}$.

В установившемся состоянии, характеризующемся постоянством углов, отклонение руля δ пропорционально отклонению объекта ψ ($\delta = a_0\psi$), причем эта жесткая связь между ψ и δ получается как результат действия отрицательной обратной связи, осуществляемой за счет плеча a коромысла BD. По этой причине данная обратная связь называется *жесткой*, а весь автопилот — автопилотом с *жесткой обратной связью.* Конечно, при изменяющемся угле ψ жесткая связь между ψ и δ несколько нарушается, в чем и состоит принципиальное отличие рассматриваемого автопилота (рис. 1.14) от гипотетического (рис. В.2).

Уравнения автопилота. Если сила, необходимая для смещения золотника, пренебрежимо мала, а масса коромысла BD и трение в его шарнирах равны нулю, то автопилот, показанный на рис. 1.14, можно считать состоящим из трех звеньев направленного действия. Этими звеньями являются гироскоп, золотник, рулевая машинка и (при делаемом ниже предположении) руль.

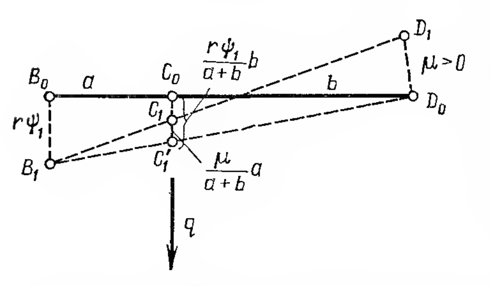


Рис. 1.15. Положение коромысла BD при последовательном изменении ψ_1, μ в положительном направлении:
B_0D_0 — при $\psi_1=0$, $\mu=0$
B_1D_0 — при $\psi_1>0$, $\mu=0$
B_1D_1 — при $\psi_1>0$, $\mu>0$

Уравнение каждого из звеньев можно составить, пользуясь изложенной в § 1.1 методикой. Согласно этой методике необходимо сначала выбрать направления положительного отсчета всех координат системы. Будем считать отклонение ψ объекта положительным, когда объект повернут от заданного курса против часовой стрелки, отклонение ψ_1 гироскопа положительным, когда гироскоп $Г$ повернут относительно объекта по часовой стрелке, отклонение q золотника положительным, когда он смещен от нейтрального положения вниз, отклонение μ поршня PM положительным, когда он смещен от срединной линии OO гидроцилиндра вверх. Положительные направления отсчета координат показаны стрелками на рис. 1.14.

Входной величиной гироскопа является угол рыскания ψ объекта, а выходной — угол ψ_1 поворота гироскопа относительно объекта. Если считать гироскоп идеально точным, то его уравнением будет

$$\psi_1 = \psi. \tag{1.22}$$

Золотник имеет две входные величины, которыми являются координата ψ_1 гироскопа и координата μ рулевой машинки. Выходная величина — смещение q золотника от нейтрального положения, при котором он закрывает оба окна золотниковой коробки. Сила, требующаяся для смещения золотника, как уже отмечалось, значительно меньше силы, необходимой для изменения положения гироскопа или поршня рулевой машинки. Поэтому при отклонении ψ_1 гироскопа коромысло BD поворачивается вокруг точки D, а при смещении μ поршня коро-

мысло поворачивается вокруг точки B. Придавая входным величинам ψ_1, μ положительные значения и учитывая указанную возможность поворотов (рис. 1.15), можно написать $C_0C_1 = C_0C_1' - C_1C_1'$ или при малых величинах ψ_1, μ $q = \frac{r\psi_1}{a+b} b - \frac{\mu}{a+b} a$.

Вводя обозначения $i_1 = rb/(a+b)$, $i_2 = a/(a+b)$, получаем уравнение золотника

$$q = i_1\psi_1 - i_2\mu. \tag{1.23}$$

Примем хорошо оправдываемое на практике допущение, что скорость $\dot{\mu}$ поршня рулевой машинки независимо от преодолеваемой силы сопротивления (нагрузки) пропорциональна степени открытия окон золотниковой коробки, т. е. отношению площади открывшейся части окна к общей площади окна. Тогда руль не влияет на работу рулевой машинки, что позволяет рассматривать рулевую машинку и руль как звенья направленного действия.

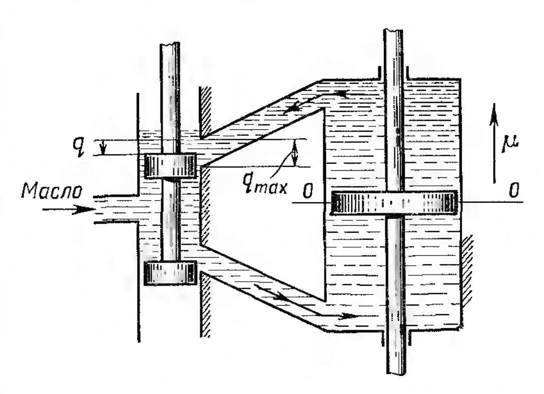


Рис. 1.16. Система «золотник — гидроцилиндр»

Входной величиной рулевой машинки является смещение q золотника от нейтрального положения, а выходной — смещение μ поршня гидроцилиндра.

Если q_{max} и $\dot{\mu}_{max}$ — соответственно ширина окна и максимальная скорость поршня, то при указанном допущении и учете направлений отсчета q и μ имеем согласно рис. 1.16 следующую пропорцию (окна предполагаются прямоугольными): $q \sim \dot{\mu}$; $q_{max} \sim \dot{\mu}_{max}$.

Отсюда уравнение рулевой машинки

$$\dot{\mu} = \dot{\mu}_{max} q/q_{max},$$

или после введения обозначения $K_m = \dot{\mu}_{max}/q_{max}$,

$$\dot{\mu} = K_m q. \tag{1.24}$$

Отклонение δ руля связано с перемещением μ поршня алгебраическим соотношением (см. рис. 1.14)

$$\delta = i_3\mu \; (i = 1/l), \tag{1.25}$$

которое можно рассматривать как уравнение руля.

Добавляя к уравнениям автопилота (1.22) ÷ (1.25) уравнения объекта, получим полную систему уравнений, описывающую замкнутую систему «объект — автопилот».

Структурная схема автопилота, составленная по уравнениям (1.22) ÷ (1.25), показана на рис. 1.17. Присоединяя к этой схеме структурную схему объекта, имеющего две степени свободы (см. рис. 1.6, *б*, 1.10, 1.13), получим структурную схему замкнутой системы «объект — автопилот с жесткой обратной связью» (рис. 1.17).

По структурной схеме автопилота легко найти его передаточную функцию

$$\frac{\hat{\delta}}{\hat{\psi}} = i_1 \frac{K_m/s}{1+(i_2K_m)/s} i_3 = \frac{a_0}{T_a s + 1}, \tag{1.26}$$

где

$$a_0 = i_1 i_3 / i_2;\ T_a = 1/(i_2 K_m). \tag{1.27}$$

Из (1.26) видно, что автопилот с жесткой обратной связью представляет собой инерционное звено (рис. 1.18).

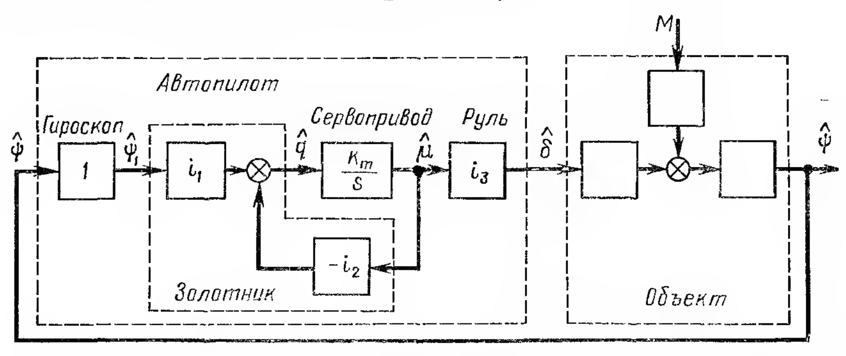


Рис. 1.17. Структурная схема системы «объект — автопилот с жесткой обратной связью»

От реального перейдем теперь к идеализированному автопилоту. Идеализация состоит в том, что быстродействие сервопривода считаем бесконечно большим, т. е. полагаем $K_m = \infty$. Тогда, согласно (1.27), $T_a = 0$ и передаточная функция (1.26) автопилота становится постоянной величиной:

$$\hat{\delta}/\hat{\psi} = a_0. \tag{1.28}$$

Отсюда видно, что если бы автопилот с жесткой обратной связью был идеальным, он в любой момент времени осуществлял бы регулирование по отклонению $\delta = a_0\psi$, т. е. работал бы подобно гипотетическому автопилоту (см. § 1.1). Реальный автопилот с жесткой обратной связью, как показывает его уравнение

$$T_a\dot{\delta} + \delta = a_0\psi, \tag{1.29}$$

осуществляет регулирование по отклонению лишь с точностью до члена $T_a\dot{\delta}$.

Поскольку цепь обратной связи (на рис. 1.18 цепь от $\hat{\psi}$ по направлению распространения сигнала до точки Σ приложения возмущения

M) не содержит интегрирующего звена $1/s$, в замкнутой системе «объект — автопилот с жесткой обратной связью» осуществляется статическое регулирование по углу отклонения объекта ψ в отношении внешнего возмущения m. Коэффициент статизма регулирования

$$C_0 = \left.\frac{\hat{\psi}}{M}\right|_{s=0} = \frac{K_3}{K_2 a_0}, \tag{1.30}$$

т. е. такой же, как в случае гипотетического автопилота, см. (1.12), (1.13).

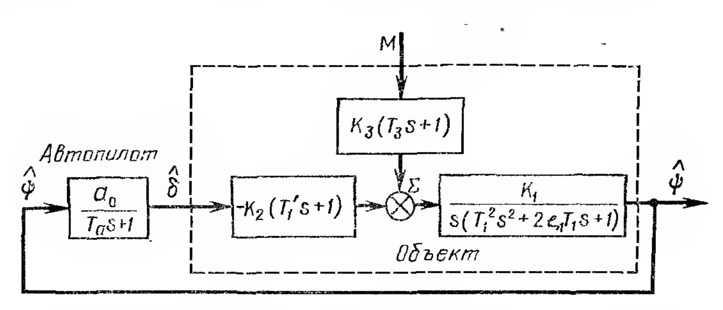


Рис. 1.18. Структурная схема, эквивалентная схеме на рис. 1.17

Увеличивая коэффициент усиления a_0 автопилота, можно уменьшить коэффициент статизма, т. е. повысить статическую точность всей системы стабилизации. Но при высоком значении a_0 вся замкнутая система «объект — автопилот» делается неустойчивой. Предел, до которого еще сохраняется устойчивость, а также пути отдаления этого предела, можно выявить, исследуя зависимость корней характеристического уравнения замкнутой системы от коэффициента a_0 усиления автопилота. Такая зависимость дается корневым годографом замкнутой системы.

§ 1.4. КОРНЕВОЙ ГОДОГРАФ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Характеристическое уравнение замкнутой одноконтурной системы (рис. 1.19), записанное при использовании передаточной функции $G(s)$ разомкнутой системы, имеет вид

$$1 + G(s) = 0. \tag{1.31}$$

Корневым годографом называют траектории в комплексной плоскости s, по которым движутся корни уравнения (1.31) (корни замкнутой системы) при изменении какого-либо параметра, обычно коэффициента усиления K по контуру системы. Числовые значения этого параметра указывают непосредственно на ветвях корневого годографа. Траектории, изображающие действительные отрицательные и действительные положительные корни, называют соответственно *действительными отрицательными и действительными положительными* ветвями корне-

вого годографа. Эти ветви располагаются на вещественной оси комплексной плоскости s. Траектории, по которым смещаются комплексные сопряженные корни, называют *комплексными ветвями* корневого годографа.

Корневой годограф можно строить, решая характеристическое уравнение (1.31) при различных значениях параметра K и изображая вычисленные корни точками в плоскости s. Можно, однако, обойтись без трудоемкого расчета по определению корней, если построение корневого годографа производить, основываясь на его характерных данных [19]. Правила определения этих данных рассматриваются ниже.

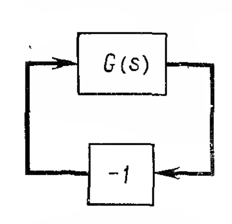


Рис. 1.19. Замкнутая одноконтурная система

Правила построения корневого годографа. Запишем передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$G(s) = KB(s)/A(s), \tag{1.32}$$

где $A(s)$, $B(s)$ — полиномы n-й и m-й степеней, а K — коэффициент усиления, принимаемый в дальнейшем в качестве параметра корневого годографа.

Корни s_i^* полинома $A(s)$, стоящего в знаменателе, называются полюсами функции $G(s)$, а корни s_j' полинома $B(s)$ в числителе—нулями этой функции.

П р а в и л о 1. Ветви корневого годографа начинаются (при $K = 0$) в полюсах $G(s)$ и оканчиваются (при $K = \infty$) в нулях $G(s)$.

Это правило легко доказывается. Характеристическое уравнение замкнутой системы (1.31) при учете (1.32) можно записать как

$$A(s) + KB(s) = 0. \tag{1.33}$$

При $K = 0$ это уравнение вырождается в уравнение $A(s) = 0$. Следовательно, корни s_i^* уравнения $A(s) = 0$, являющиеся полюсами $G(s)$, представляют собой корни s_k замкнутой системы при $K = 0$.

Записав характеристическое уравнение (1.33) в виде

$$[A(s)/K] + B(s) = 0 \tag{1.34}$$

и положив $K \to \infty$, приходим к вырожденному уравнению $B(s) = 0$, корни которого s_j', равные нулям $G(s)$, представляют собой корни s_k замкнутой системы при $K = \infty$. Отсюда вытекает сформулированное правило.

Степень числителя функций $G(s)$ всегда ниже (или в крайнем случае равна) степени знаменателя ($m \leqslant n$), так что степень характеристического уравнения замкнутой системы (1.33) и число его корней равны n. При $K \to \infty$ из всех n корней стремятся к конечным нулям s_i' лишь m корней. Остальные ($n - m$) корней обращаются в бесконечность, что вытекает из факта обращения в нуль при $K \to \infty$ коэффициентов в ($n - m$) старших членах характеристического уравнения (1.34). Соответствующие этим корням ветви корневого годографа при $K \to \infty$ приближаются к прямолинейным асимптотам (см. след. правило).

П р а в и л о 2. Углы α_k, составляемые асимптотами с положительным направлением действительной оси, определяются формулой

$$\alpha_k = [180° (1 + 2k)]/(n - m);\ k = 0, 1, 2, \ldots, n - m - 1. \quad (1.35)$$

Асимптоты пересекаются в точке на действительной оси, имеющей абсциссу

$$\delta_0 = \frac{\text{сумма полюсов } G(s) - \text{сумма нулей } G(s)}{n - m}. \quad (1.36)$$

Эту точку называют *центром асимптот*.

П р и м е р. Рассмотрим систему «объект — автопилот с жесткой обратной связью» (см. рис. 1.18). Передаточная функция по контуру этой системы

$$G(s) = \frac{K_v (T_1' s + 1)}{s (T_a s + 1)(T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1)} \quad (1.37)$$

при числовых значениях постоянных

$$T_a = 1/12,\ T_1' = 1/3;\ T_1 = 1/2;\ \zeta_1 = 0{,}8, \quad (1.38)$$

соответствующих дозвуковому транспортному самолету [2], принимает вид

$$G(s) = \frac{K_v \left(\frac{s}{3} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{12} + 1\right)\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} s + 1\right]}. \quad (1.39)$$

Корни знаменателя

$s_1^* = 0,\ s_2^* = -12,\ s_3^*, s_4^* = -0{,}8 \cdot 2 \pm j2\sqrt{1 - 0{,}8^2} = -1{,}6 \pm j1{,}2$ —

полюсы разомкнутой системы, а корень числителя (1.40)

$$s_1' = -3 \quad (1.41)$$

— нуль этой системы. В комплексной плоскости s будем изображать нули $G(s)$ кружками, а полюсы — косыми крестиками. Нули и полюсы функции (1.39) указаны на рис. 1.20.

Комплексные сопряженные полюсы s_3^*, s_4^*, равные корням трехчлена знаменателя, располагаются на радиальных прямых, составляющих с отрицательным направлением действительной оси угол θ. Угол θ находится из условия $\cos\theta = \zeta_1$, где ζ_1 — относительный коэффициент демпфирования трехчлена. В данном случае $\theta = \arccos 0{,}8 = 37°$. Расстояние полюсов s_3^*, s_4^* до начала координат равно недемпфированной частоте ω_n трехчлена, выражаемой через постоянную времени трехчлена формулой $\omega_n = 1/T_1$. В данном случае $\omega_n = 2$.

Чтобы построить асимптоты корневого годографа, вычислим по формуле (1.36) центр асимптот. Принимая во внимание (1.40), (1.41) имеем

$$\delta_0 = \frac{(s_1^* + s_2^* + s_3^* + s_4^*) - s_1'}{n - m} =$$

$$= \frac{(0 - 12 - 1{,}6 + j1{,}2 - 1{,}6 - j1{,}2) - (-3)}{4 - 1} = -4{,}06. \quad (1.42)$$

Найдем по формуле (1.35) углы, под которыми асимптоты выходят из центра:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_k = \frac{180^\circ(1+2k)}{4-1}; \quad k=0,\ 1,\ 2; \\ &\alpha_0 = 60^\circ; \quad \alpha_1 = 180^\circ; \ \alpha_2 = 300^\circ. \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

Асимптоты, построенные по данным (1.42), (1.43), показаны на рис. 1.20.

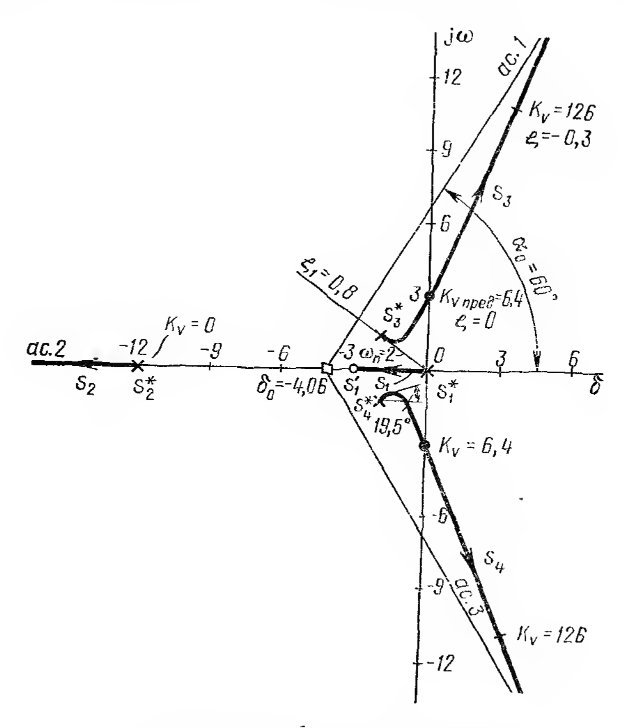


Рис. 1.20. Корневой годограф системы

$$G(s) = \frac{K_v(s/3+1)}{s(s/12+1)\,[(s/2)^2+2\cdot 0{,}8\cdot(s/2)+1]}$$

П р а в и л о 3. Участки оси абсцисс, расположенные левее нечетного числа действительных нулей и полюсов $G(s)$, являются действительными ветвями корневого годографа.

Чтобы убедиться в справедливости этого правила, сформулируем сначала условия образования корней замкнутой системы. Записав характеристическое уравнение замкнутой системы (1.31) как

$$G(s) = -1 \tag{1.44}$$

видим, что его корнями являются значения $s = s_i$, при которых одновременно выполняются следующие два условия:

$$| G (s_i) | = 1, \tag{1.45а}$$

$$\angle G (s_i) = 180° (1 + 2k), \tag{1.45б}$$

где k — любое целое число.

Действительно, если уравнение (1.44) удовлетворяется при $s = s_i$, то при этом значении s_i должны быть одинаковы как модули (условие 1.45а), так и аргументы (условие 1.45б) левой и правой частей уравнения. Здесь и в дальнейшем аргумент комплексных и действительных величин будем обозначать символом $\angle$. Например, $\angle(-1) = 180° (1 + 2k)$, где k—целое число. Условия (1.45а—1.45б) называются условиями образования корней замкнутой системы.

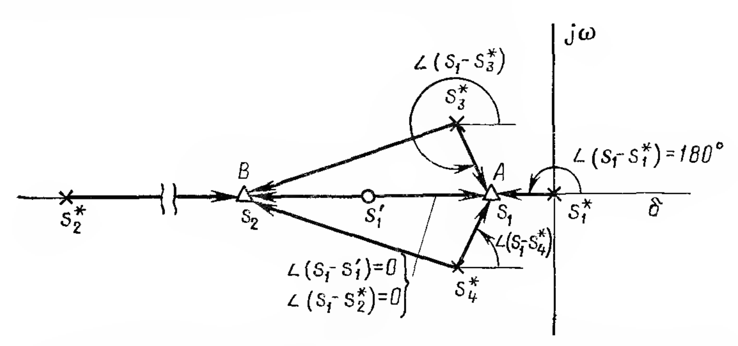


Рис. 1.21. Составляющие фазового угла $\angle G(s)$ для точек *А* и *В*

Обратимся теперь к проверке рассматриваемого правила. Возьмем для примера на оси абсцисс точки *А* и *В* (рис. 1.21). Из нулей и полюсов $G(s)$ проведем в эти точки векторы (s — значение независимой переменной в точках *А*, *В*). Данные векторы представляют собой сомножители $(s - s_1')$; $(s - s_i^*)$; $(i = 1, 2, 3, 4)$, из которых состоят числитель и знаменатель функции $G(s)$ при подстановке вместо s координат s_1 и s_2 точек *А*, *В*. Из рис. 1.21 видно, что

$$\angle G (s) = \angle(s - s_1') - \sum_{i=1}^{4} \angle (s - s_i^*) \tag{1.46}$$

для точки *А* будет:

$$\angle G (s_1) = 0° - 180° - 0° - \angle(s_1 - s_3^*) - \angle(s_1 - s_4^*) = -180° \cdot 3,$$

так как для всех точек оси абсцисс углы, соответствующие комплексным сопряженным полюсам (или нулям), в сумме дают 360°. Следовательно, условие (1.45б) образования корней в точке *А* и во всех точках отрезка $s_1^* s_1'$ соблюдается. Что касается условия (1.45а), то его выполнение всегда можно обеспечить выбором коэффициента усиления $K_н$. Следовательно, отрезок $s_1^* s_1'$ является ветвью корневого годографа.

Вместе с тем этот отрезок лежит левее нечетного числа действительных нулей и полюсов (в данном случае левее одного полюса s_1^*).

Для точки B аргумент $\angle G(s_2)$ имеет следующее значение:

$$\angle G(s_2) = 180° - 180° - 0° - \angle(s_2 - s_3^*) - \angle(s_2 - s_4^*) = -180° \cdot 2.$$

Это значение кратно 180° в четное число раз, так что условие (1.45б) не выполняется и отрезок $s_1' s_2^*$ не может быть ветвью корневого годографа. Вместе с тем видно, что этот отрезок располагается левее четного числа действительных нулей и полюсов (в данном случае левее одного полюса s_1^* и одного нуля s_1'). Изложенное показывает справедливость рассматриваемого правила.

С помощью данного правила на рис. 1.20 выделены утолщенными линиями отрезки оси абсцисс, являющиеся действительными ветвями корневого годографа. Ветвь, начинающаяся при $K_v = 0$ в полюсе s_1^*, в соответствии с правилом 1 заканчивается в нуле s_1' при $K_v = \infty$. Ветвь, начинающаяся в полюсе s_2^*, при $K_v \to \infty$ уходит в бесконечность вдоль асимптоты *2*.

П р а в и л о 4. Угол выхода комплексной ветви из комплексного полюса разомкнутой системы s_r^* определяется формулой

$$\angle(s - s_r^*) = -180°(1+2k) + \sum_{j=1}^{m} \angle(s_r^* - s_j') - \sum_{i=1}^{r-1} \angle(s_r^* - s_i^*) - \sum_{i=r+1}^{n} \angle(s_r^* - s_i^*). \qquad (1.47)$$

Под углом выхода $\angle(s - s_r^*)$ понимается угол, составляемый с положительным направлением оси абсцисс касательной к комплексной ветви в точке s_r^*, являющейся началом (при $K = 0$) комплексной ветви.

Справедливость формулы (1.47) становится очевидной, если на комплексной ветви взять точку s, близкую к полюсу s_r^*, и записать для этой точки условие образования корней (1.45б). Вследствие близости s и s_r^* можно во всех членах, кроме $\angle(s - s_r^*)$, заменить s на s_r^*, что и приводит к формуле (1.47).

Для рассматриваемого примера имеем (рис. 1.22)

$$\angle(s - s_3^*) = -180°(1+2k) + \angle(s_3^* - s_1') - \angle(s_3^* - s_1^*) - \angle(s_3^* - s_2^*) - \angle(s_3^* - s_4^*) = -180°(1+2k) + 40{,}5° - 143° - 6{,}5° - 90°. \qquad (1.48)$$

Полагая $k = -1$, получим $\angle(s - s_3^*) = -19{,}5°$ (см. рис. 1.20).

П р а в и л о 5. Точки пересечения комплексных ветвей с мнимой осью и соответствующий этим точкам параметр K можно найти в результате применения критерия устойчивости Рауса.

Критерий устойчивости Рауса был предложен значительно раньше (1877 г.), чем другие (Гурвица 1895 г., Найквиста 1932 г., Михайлова 1938 г.) критерии устойчивости. Однако он не утратил своего значения и в некоторых задачах современной практики даже более предпочти-

телен (например, в исследуемой здесь задаче о точках пересечения с мнимой осью).

Критерий устойчивости Рауса заключается в следующем. По коэффициентам характеристического уравнения

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0 \qquad (1.49)$$

составляют таблицу Рауса

$$\begin{array}{llll} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \dots & & & \end{array}$$

Первая и вторая строки этой таблицы формируются, как указано, из коэффициентов характеристического уравнения. Любая из других строк образуется из двух предшествующих строк по следующему пра-

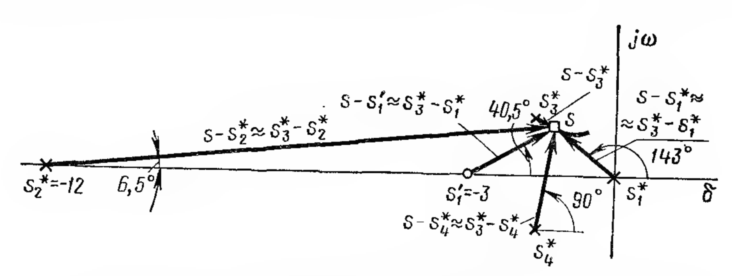


Рис. 1.22. Составляющие $\angle G(s)$ для точки комплексной ветви, близкой к полюсу s_3^*

вилу. Из чисел верхней строки вычитают соответствующие числа нижней, предварительно помноженные на такое число, чтобы первая разность обращалась в нуль. Отбрасывая эту нулевую разность, получаем искомую строку. Например,

$$\left.\begin{array}{ll} b_1 = a_2 - a_0 a_3/a_1, & b_2 = a_4 - a_0 a_5/a_1, \dots \\ c_1 = a_3 - a_1 b_2/b_1, & c_2 = a_5 - a_1 b_3/b_1, \dots \end{array}\right\} \qquad (1.50)$$

и т. д.

Таблицу продолжают до появления строки, состоящей только из нулей. Общее число строк полной таблицы Рауса превышает на единицу степень n исследуемого уравнения.

Согласно критерию Рауса число изменений знака в первом столбце таблицы равно числу корней исследуемого уравнения (1.49), имеющих положительную вещественную часть. Следовательно, система устойчива, если все элементы первого столбца таблицы Рауса имеют одинаковые знаки.

Пример.

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 5s + 6 = 0. \qquad (1.51)$$

Таблица Рауса

1	2	5
3	1	6
5/3	3	
—22/5	6	
116/22		
6		

Проследив знаки в элементах первого столбца, замечаем, что знак изменяется два раза (при переходе от элемента 5/3 к элементу — 22/5 и при переходе от элемента — 22/5 к элементу 116/22).
Следовательно уравнение (1.51) имеет два корня с положительной вещественной частью.

Чтобы не иметь дела с дробными числами, можно любую строку таблицы Рауса, начиная с третьей, умножать или делить на любое положительное число. Например, умножая третью строку таблицы на 3 и продолжая таблицу дальше согласно прежнему правилу, получим (четвертая и пятая строки умножались соответственно на 5/2 и 11/2):

1	2	5
3	1	6
5	9	
—11	15	
87		
15		

Если какой-либо элемент первого столбца обращается в нуль (при наличии в строке, начинающейся с этого элемента, каких-либо других отличных от нуля элементов), поступают следующим образом. Заменяют нулевой элемент малой положительной величиной ε и продолжают таблицу Рауса дальше по обычному правилу. Затем в предположении $\varepsilon \to 0$ определяют число изменений знаков в первом столбце.

Пример.

$$s^4+3s^3+s^2+3s+1=0. \qquad (1.52)$$

Таблица Рауса

1	1	1
3	3	
ε	1	
$3-3/\varepsilon$		
1		

При $\varepsilon \to 0$ первый элемент четвертой строки становится большой по модулю отрицательной величиной. Следовательно, в первом столбце имеется две перемены знака, указывающие иа наличие двух корней уравнения (1.52) с положительной вещественной частью.

Если до полного завершения таблицы Рауса появится строка, все элементы которой равны нулю, то это означает, что часть корней исследуемого уравнения сгруппирована в пары, причем входящие в пару корни различаются только знаком. Среди этих корней всегда имеется пара чисто мнимых. Парные корни можно найти из рассматриваемого ниже вспомогательного полинома.

Чтобы в указанном случае завершить таблицу Рауса, поступают следующим образом. Формируют вспомогательный полином, содержащий только четные степени s. Этот полином имеет степень $n - j + 2$, где n — степень характеристического уравнения, а j — номер строки,

состоящей из нулей. Коэффициентами вспомогательного полинома служат соответственные элементы строки, предшествующей строке из нулевых элементов. Дифференцируя вспомогательный полином по s, получают другой полином, из коэффициентов которого и формируется строка, предназначаемая служить в качестве j-й строки таблицы Рауса (вместо строки из нулевых элементов). Далее таблицу продолжают по обычному правилу.

Как уже отмечалось, парные корни исследуемого уравнения совпадают с корнями вспомогательного полинома.

Пример.

$$s^6+s^5-2s^4-3s^3-7s^2-4s-4=0. \tag{1.53}$$

Таблица Рауса

$$\begin{matrix} 1 & -2 & -7 & -4 \\ 1 & -3 & -4 & \\ 1 & -3 & -4 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{matrix}$$

Все элементы четвертой строки обратились в нуль. Основываясь на элементах третьей строки и имея в виду, что степень вспомогательного полинома $6-4+2=4$, можно написать следующее выражение этого полинома:

$$1\cdot s^4-3s^2-4. \tag{1.54}$$

Дифференцируя по s, имеем

$$4s^3-6s. \tag{1.55}$$

Следовательно, в качестве элементов четвертой строки таблицы Рауса надо использовать 4 и —6. Продолжаем таблицу, начиная с четвертой строки:

$$\begin{matrix} 4 & -6 \\ -1{,}5 & -4 \\ -16{,}7 & \\ -4 & \end{matrix}$$

В первом столбце таблицы Рауса наблюдается одна перемена знака (при переходе от элемента 4 к элементу —1,5). Следовательно, уравнение (1.53) имеет один корень с положительной вещественной частью.

Раскладывая вспомогательный полином (1.54) на множители $s^4-3s^2-4=(s^2+1)(s^2-4)$ видим, что уравнение (1.53) имеет следующие четыре корня: $s_{1,2}=\pm j$; $s_{3,4}=\pm 2$ (два других корня уравнения (1.54) имеют отрицательную вещественную часть).

Обратимся теперь к системе (1.39). Характеристическое уравнение соответствующей замкнутой системы имеет вид

$$s^4+16s^3+42s^2+(48+16K_v)s+48K_v=0. \tag{1.56}$$

Формируя таблицу Рауса, получим

$$\begin{matrix} 1 & 42 & 48K_v \\ 16 & 48+16K_v & \\ 39-K_v & 48K_v & \\ \dfrac{-16(K_v^2+12K_v-117)}{39-K_v} & & \\ 48K_v & & \end{matrix}$$

При возрастании K_v от нуля все элементы четвертой строки (она состоит из одного элемента) при $K_v = 6{,}4$ обращаются в нуль. Формируем вспомогательный полином. Степень этого полинома $n - j + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$. При $K_v = 6{,}4$ элементы предшествующей строки становятся соответственно 32,6 и 307, 2, так что уравнение, получающееся приравниванием нулю вспомогательного полинома, имеет вид $32{,}6\ s^2 + 307{,}2 = 0$.

Решая это уравнение, находим корни $s_3, s_4 = \pm\ j\ 3{,}06$ уравнения (1.56) при $K_v = 6{,}4$. По найденным данным можно построить точки пересечения комплексных ветвей с мнимой осью (см. рис. 1.20).

Уточнение комплексных ветвей и разметка по значениям параметра. Промежуточные точки комплексных ветвей можно найти при помощи аналитического метода. Проиллюстрируем этот метод на примере системы (1.39). Характеристическое уравнение данной системы в замкнутом состоянии можно записать как

$$A\ (s) + K_v B\ (s) = 0, \tag{1.57}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A\,(s) &= a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s = s^4 + 16s^3 + 42s^2 + 48s; \\ B\,(s) &= b_0 s + b_1 = 16s + 48. \end{aligned}\right\} \tag{1.58}$$

Потребуем, чтобы уравнение (1.57) имело комплексный корень $s = \delta + j\omega$, что возможно, так как в уравнении содержится свободный параметр K_v. Подставляя $s = \delta + j\omega$, получим

$$A\ (\delta + j\omega) + K_v B\ (\delta + j\omega) = 0. \tag{1.59}$$

Разложим теперь функции A и B в окрестности точки δ в ряд Тейлора. Тогда уравнение (1.59) примет вид

$$A\,(\delta) + A'\,(\delta)\,j\omega - A''\,(\delta)\,\frac{\omega^2}{2!} + A'''\,(\delta)\,\frac{(j\omega)^3}{3!} +$$
$$+ A^{\mathrm{IV}}\,(\delta)\,\frac{\omega^4}{4!} + K_v\,[B\,(\delta) + j\omega B'\,(\delta)] = 0.$$

Приравнивая порознь нулю действительную и мнимую части, получим систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A\,(\delta) - \frac{1}{2}\,\omega^2 A''\,(\delta) + \frac{1}{24}\,\omega^4 A^{(\mathrm{IV})}\,(\delta) + K_v B\,(\delta) = 0; \\ A'\,(\delta) - \frac{1}{6}\,\omega^2 A'''\,(\delta) + K_v B'\,(\delta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.60}$$

Решение системы (1.60) относительно ω^2 и K_v приводит к выражению этих величин как функций δ. Задаваясь различными δ_i и вычисляя значения ω_i и K_{vi}, можно определить как положение точек комплексных ветвей, так и соответствующие им значения K_{vi} (рис. 1.23).

Найдем для примера этим методом точки пересечения комплексных ветвей с мнимой осью. Подставив $\delta = 0$ в выражения (1.58) и

в производные этих выражений, получим: $A(0)=0$, $A'(0)=a_3$, $A''(0)=2a_2$, $A'''(0)=6a_1$, $A^{(IV)}(0)=24a_0$, $B(0)=b_1$, $B'(0)=b_0$.

Тогда система (1.60) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} a_0\omega^4-a_2\omega^2+b_1K_v=0,\\ -a_1\omega^2+a_3+b_0K_v=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.61)$$

Разрешив при учете числовых значений (1.58) эту систему относительно ω и K_v, получим $\omega=3{,}06$, $K_v=6{,}4$. Эти значения, как и долж-

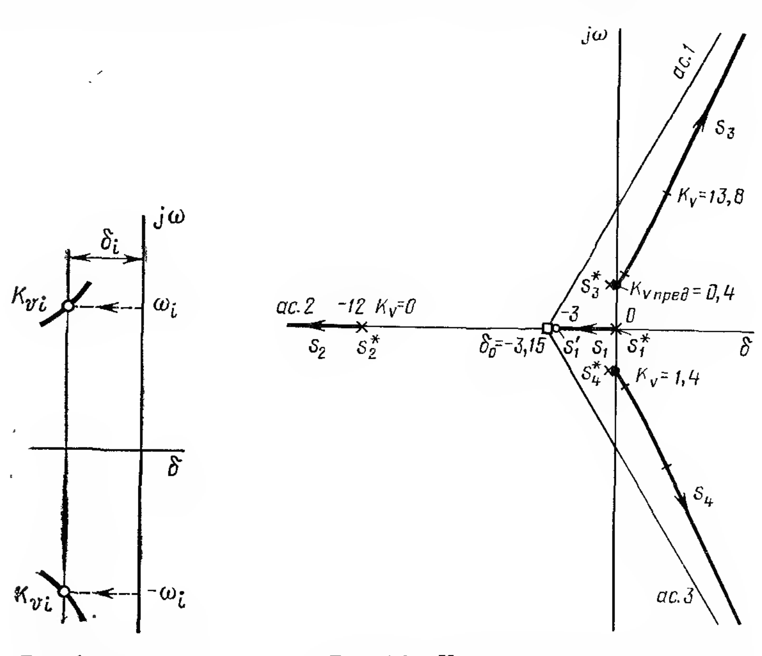


Рис. 1.23. Точки комплексных ветвей, найденные по расчетным значениям ω_i

Рис. 1.24. Корневой годограф системы

$$G(s)=\frac{K_v(s/3+1)}{s(s/12+1)[(s/2)^2+2\cdot0{,}1\cdot(s/2)+1]}$$

но быть, совпадают с вычисленными ранее при составлении таблицы Рауса значениями ω, K_v, соответствующими точке пересечения комплексной ветви с мнимой осью.

Корневой годограф системы «скоростной объект — автопилот». Согласно формуле (1.13) относительный коэффициент демпфирования ζ_1 статически устойчивого объекта определяется следующим выражением:

$$\zeta_1=\frac{JC_3+Dm_0V}{2\sqrt{Jm_0V(C_1m_0V+DC_3)}}. \qquad (1.62)$$

Учитывая малость коэффициента D аэродинамического демпфирования объекта, можно видеть, что чем выше скорость V объекта, тем

меньше его относительный коэффициент демпфирования ζ_1. Для современных высокоскоростных объектов $\zeta_1 \approx 0,1$.

На рис. 1.24 построен корневой годограф системы «объект — автопилот» при использовании всех данных (1.38), за исключением коэффициента ζ_1, который взят теперь равным 0,1 (вместо 0,8). Корневой годограф показывает, что система «объект — автопилот» делается неустойчивой при очень малом коэффициенте усиления по контуру ($K_{v\,\text{пред}} = 0,4$, а в ранее рассмотренном случае $K_{v\,\text{пред}} = 6,4$). Статическая точность и показатели качества регулирования замкнутой системы «объект — автопилот» получаются очень низкими. Поэтому автопилоты с регулированием по отклонению для современных скоростных объектов мало пригодны. Под показателем качества здесь прежде всего подразумевается относительный коэффициент демпфирования ζ колебательной составляющей переходного процесса. При выбранном значении K_{v1} коэффициент ζ определяют как косинус угла θ для радиальной прямой, проведенной через точку K_{v1} комплексной ветви. В рассматриваемом случае (см. рис. 1.24) значения ζ, соответствующие устойчивой замкнутой системе, заключены в пределах $0 < \zeta \leqslant 0,1$, тогда как наилучшее качество регулирования имеет место при $\zeta = 0,7$.

Глава II

АВТОПИЛОТЫ С РЕГУЛИРОВАНИЕМ ПО УГЛОВОМУ ОТКЛОНЕНИЮ И ПРОИЗВОДНЫМ

В случае объекта, движущегося с большой скоростью, высокая статическая точность и хорошие показатели качества регулирования могут быть достигнуты применением автопилота, осуществляющего регулирование не только по отклонению, но и по скорости изменения отклонения, т. е. автопилота, в основу которого положен закон регулирования:

$$\delta = a_0\psi + a_1\dot{\psi}. \qquad (2.1)$$

Такой автопилот, определяя тенденцию изменения угла рыскания, т. е. производную $\dot{\psi}$, заранее отводит руль в требуемое положение. Это регулирование «с упреждением» убыстряет затухание свободных колебаний замкнутой системы, так как отчасти нейтрализует вредное влияние запаздываний, обусловливаемых другими элементами (например, рулевой машинкой) этой системы. Сказанное выше подтверждается рассматриваемым далее корневым годографом системы «объект — автопилот».

§ 2.1. КОРНЕВОЙ ГОДОГРАФ СИСТЕМЫ «ОБЪЕКТ — АВТОПИЛОТ»

Будем считать, что автопилот обладает такой же инерционностью, т. е. постоянной времени T_a, как и рассмотренный ранее (см. рис. 1.18), но помимо регулирования по углу он осуществляет также регулирование по угловой скорости рыскания.

Передаточная функция такого автопилота

$$W_a(s) = \hat{\delta}/\hat{\psi} = (a_0 + a_1 s)/(T_a s + 1).$$

Принимая прежний объект с малым коэффициентом ζ_1, из структурной схемы системы «объект — автопилот» (рис. 2.1) получим передаточную функцию по контуру:

$$G(s) = \frac{K_v (T_a' s + 1)\left(\frac{s}{3} + 1\right)}{s (T_a s + 1)\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot\frac{s}{2} + 1\right]}, \qquad (2.2)$$

где $T_a' = a_1/a_0$; $T_a = {}^1/_{12}$ с.

При соблюдении условия $T'_a = T_a$ автопилот (2.1) реализует закон регулирования $\delta = a_0\psi$, характерный для показанного на рис. 1.2 гипотетического автопилота. Корневой годограф замкнутой системы при этом условии представлен на рис. 2.2. Расположение асимптот комплексных ветвей (два вертикальных луча, направленных в противоположные стороны) в правой полуплоскости и близость полюсов s_2^*, s_3^* к мнимой оси обусловливают невысокое предельное значение K_v и малость предельно достижимого значения относительного коэффициента демпфирования ζ замкнутой системы. Чтобы улучшить эти показатели, необходимо вертикальные асимптоты переместить из правой в левую по-

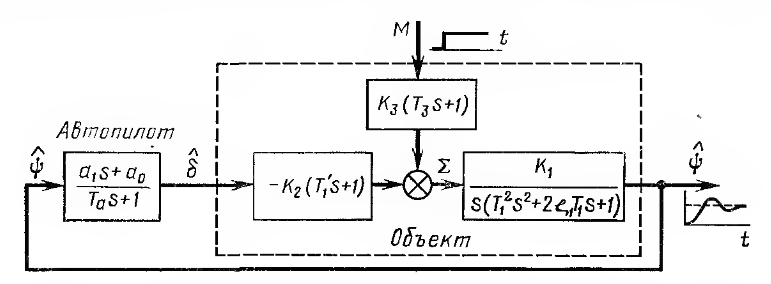


Рис. 2.1. Система «объект — автопилот с регулированием по углу и угловой скорости»

луплоскость. С этой целью, отказываясь от условия $T'_a = T_a$, подчиним абсциссу центра асимптот [см. (1.36)] неравенству

$$\delta_0 = \frac{(-0{,}1\cdot 2-0{,}1\cdot 2-1/T_a)-(-3-1/T'_a)}{4-2} < 0. \qquad (2.3)$$

Отсюда находим, что $1/T'_a < 1/T_a - 2{,}6$. Чем больше T'_a, тем дальше влево сдвигаются от мнимой оси вертикальные асимптоты. Их предельное положение (при $T'_a = \infty$): $\delta_{0\,\text{пред}} = (-0{,}4-12+3)/2 = -4{,}7$.

Однако, как видно из корневого годографа, изображенного на рис. 2.3, при большом значении T'_a предельное положение (при $K_v = \infty$) действительного отрицательного корня s_1 замкнутой системы слишком близко к мнимой оси. Поэтому при выборе T'_a необходимо прибегать к компромиссному решению. Если, например, удовлетвориться предельным положением действительного корня $s_{1\,\text{пред}} = -2$, то допустимое начение T'_a будет $^1/_2$. При этом центр асимптот $\delta_0 = -3{,}7$.

Вопрос об оптимальном значении коэффициента усиления по контуру системы решают с учетом допустимого коэффициента статизма (по ψ осуществляется статическое регулирование в отношении внешнего момента M, так как цепь обратной связи не содержит интегрирующего звена, см. рис. 2.1) и желаемого значения относительного коэффициента демпфирования. Значение K_{v0}, обеспечивающее максимально возможный коэффициент демпфирования ζ_0, можно определить, проведя из начала координат луч, касающийся комплексной ветви. Значение K_{v0} соответствует точке касания. Индекс ζ_0 этого луча, определяемый по

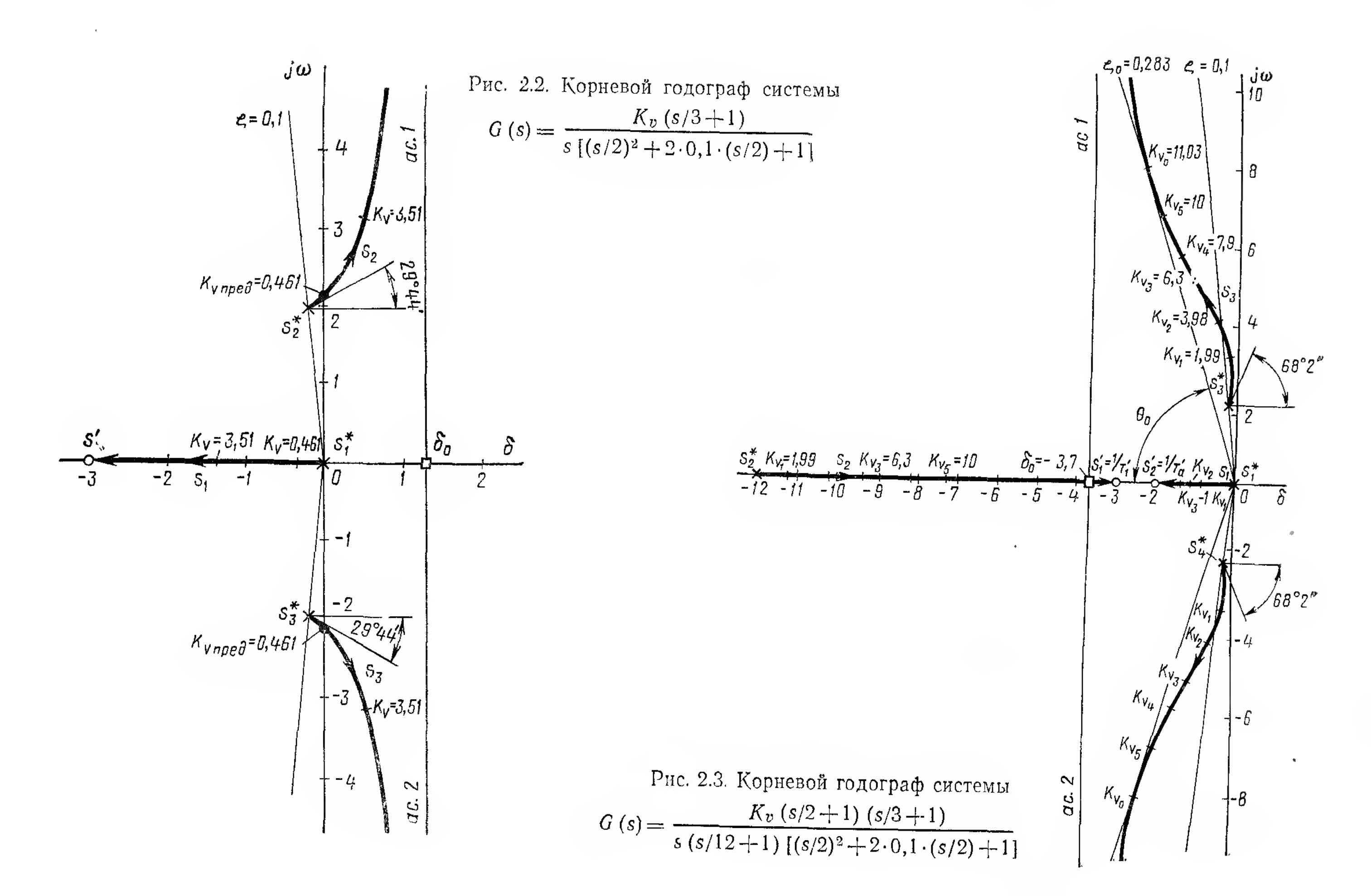


Рис. 2.2. Корневой годограф системы

$$G(s) = \frac{K_v\,(s/3+1)}{s\,[(s/2)^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot(s/2)+1]}$$

Рис. 2.3. Корневой годограф системы

$$G(s) = \frac{K_v\,(s/2+1)\,(s/3+1)}{s\,(s/12+1)\,[(s/2)^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot(s/2)+1]}$$

углу θ_0 ($\zeta_0 = \cos\theta_0$), равен максимально достижимому (при сдельном выборе T'_a) значению относительного коэффициента демпфирования ζ системы «объект — автопилот».

Коэффициент статизма

$$C_0 = K_3/(K_2 a_0), \qquad (2.4)$$

где a_0 однозначно определяется выбранным значением K_{v0}.

В следующих трех параграфах рассматриваются некоторые схемы автопилотов, реализующих закон регулирования $\delta = a_0\psi + a_1\dot{\psi}$.

§ 2.2. АВТОПИЛОТ СО СВОБОДНЫМ ГИРОСКОПОМ И ДАТЧИКОМ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

В этом автопилоте закон регулирования $\delta = a_0\psi + a_1\dot{\psi}$ формируется путем непосредственного измерения угла рыскания ψ и угловой скорости рыскания $\dot{\psi}$ соответственно свободным гироскопом и датчиком угловой скорости (ДУС).

Рассмотрим схемы датчиков угловой скорости [15, 16]. Как отмечалось во введении, ДУС — это гироскоп с двумя степенями свободы, служащий для измерения абсолютной угловой скорости основания, на котором этот прибор установлен. По конструктивному выполнению эти приборы разделяют на ДУСы с механической и «электрической» пружинами.

Датчики угловой скорости с механической пружиной. Схема ДУСа с механической пружиной показана на рис. 2.4. Прибор имеет входную и выходную оси. При монтаже входную ось (она перпендикулярна плоскости, образуемой осями вращения ротора и его кожуха в случае, когда пружина K_1 не напряжена) направляют по оси объекта, угловую скорость вокруг которой необходимо измерить. В данном случае прибор предназначен для измерения угловой скорости рыскания $\dot{\psi}$, поэтому входная ось прибора совпадает с осью объекта y_1. Выходной величиной является угол β поворота кожуха гироскопа вокруг оси прецессии y, измеряемый потенциометрическим или индукционным устройством.

Прибор работает следующим образом. При вращении объекта, например, с угловой скоростью $\dot{\psi} = \text{const}$ вектор кинетического момента гироскопа $\overline{H}$ (он направлен по оси вращения ротора) вынужден вращаться вместе с объектом. Вследствие этого возникает гироскопический момент $\overline{\Gamma}$, прикладываемый к ротору. Как показывает векторное произведение $\overline{\Gamma} = [\overline{H}\dot{\psi}]$, гироскопический момент Γ направлен по оси y вращения кожуха. Под действием момента $\overline{\Gamma}$ кожух (вместе с ротором) поворачивается вокруг оси y, и противодействующая пружина K_1 напрягается (сжимается или растягивается).

После успокоения колебаний (для демпфирования свободных колебаний кожуха используется воздушный демпфер f_1, состоящий из порш

ня и цилиндра с капиллярным отверстием; рассеяние энергии колебаний происходит за счет трения при прохождении воздуха через капиллярное отверстие) кожух оказывается отклоненным от среднего положения. Угол отклонения β пропорционален угловой скорости рыскания $\dot{\psi} = \text{const}$, так как в установившемся состоянии гироскопический момент уравновешивается лишь моментом, возникающим из-за деформации линейной пружины.

При направлениях положительного отсчета угловых скоростей $\bar{\dot{\psi}}$, $\bar{\dot{\gamma}}$, $\bar{\dot{\beta}}$, отмеченных на рис. 2.4 соответствующими векторами, уравнение движения ДУСа имеет вид*

$$J_1 \ddot{\beta} + f_1 \dot{\beta} + K_1 \beta = H\dot{\psi} \cos\beta + H\dot{\gamma} \sin\beta, \qquad (2.5)$$

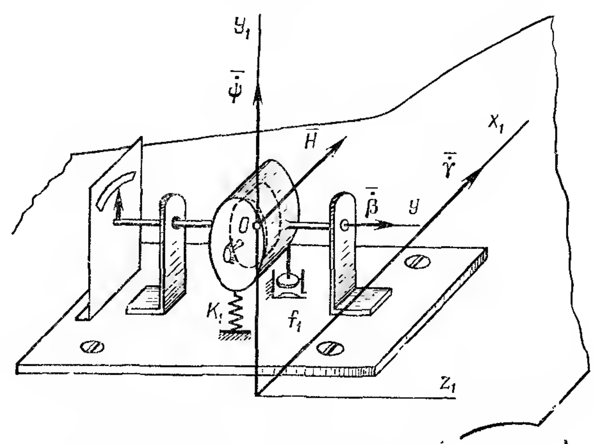


Рис. 2.4. Схема ДУСа с механической пружиной

где f_1 — коэффициент вязкого трения, вводимого демпфером; K_1 — величина, равная коэффициенту жесткости пружины, умноженному на квадрат плеча силы пружины относительно точки O.

Поскольку угол β мал (обычно $\beta_{max} = 2$—$5°$), можно положить $\cos\beta \approx 1$, $\sin\beta \approx \beta$. Пренебрегая произведением $\dot{\gamma}\beta$ (при последующей линеаризации уравнений автопилота и объекта это произведение все равно исчезло бы), получим передаточную функцию ДУСа

$$\hat{\beta}(s)/\hat{\dot{\psi}}(s) = K_Д\, \omega_n^2/(s^2 + 2\zeta_Д\, \omega_n s + \omega_n^2), \qquad (2.6а)$$

где $K_Д = H/K_1$ — коэффициент усиления ДУСа; $\omega_n = \sqrt{K_1/J_1}$ и $\zeta_Д = f_1/2\sqrt{J_1K_1}$ — соответственно недемпфированная частота и относительный коэффициент демпфирования ДУСа.

* Предполагается, что углы тангажа и крена объекта (см. гл. IV) равны нулю, так что вектор $\bar{\dot{\psi}}$ направлен по оси y_1.

Если за входную величину ДУСа принять угол рыскания ψ, то при учете съемного устройства, преобразующего угол β в напряжение $u_Д$, передаточная функция ДУСа

$$U_Д/\hat{\psi} = K'_Д \omega_n^2 s/(s^2 + 2\zeta_Д \omega_n s + \omega_n^2). \qquad (2.6б)$$

Наличие множителя s в числителе (2.6 б) дало возможность иногда называть рассматриваемый прибор *дифференцирующим гироскопом.*

Собственные колебания ДУСа (переходной процесс) мало сказываются на правильности производимых ДУСом измерений лишь в том случае, если они затухают за время, меньшее периода самой быстрой частотной составляющей измеряемого процесса. Но длительность собственных колебаний тем меньше, чем больше недемпфированная частота ω_n (при неизменном значении $\zeta_Д$). Поэтому при конструировании ДУСа параметры выбирают так, чтобы $\omega_n > (10 \div 20)\,\omega_0$, где ω_0 — частота самой «быстрой» составляющей измеряемого процесса.

Относительный коэффициент демпфирования $\zeta_Д$ делают близким к оптимальному значению $\zeta_{опт} = 0{,}7$.

Ниже приводятся некоторые параметры ДУСа (американской фирмы Хэньуэл), устанавливаемого на объекте с собственной частотой $\omega_0 = 4$ 1/с, а именно: $\omega_n = 158$ 1/с; $\zeta_Д = 0{,}33$ при 75° С; $\zeta_Д = 0{,}7$ при — 40° С; $K_Д = 0{,}115 \dfrac{в}{град/с}$. При габаритах 29,8 × 31,4 × 76,1 мм этот ДУС имеет порог чувствительности 0,1 град/с. Диапазон измерения составляет ± 15 град/с.

Чтобы угловая скорость $\dot{\gamma}$ вокруг продольной оси объекта мало влияла на показания ДУСа, максимальный угол отклонения гироскопа β_{max}, как это видно из (2.5), должен быть небольшим. Это накладывает ограничение на диапазон измеряемых угловых скоростей $\pm\dot{\psi}_{max}$, так как величина $\beta_{max}/\dot{\psi}_{max}$ не может быть ниже уровня, допускаемого разрешающей способностью съемного устройства.

Учитывая формулу

$$K_1 = H/(\beta_{max}/\dot{\psi}_{max}), \qquad (2.7)$$

получающуюся из (2.5) для установившегося состояния, видим, что при заданной разрешающей способности жесткость пружины K_1 ограничена. Однако для уменьшения времени затухания собственных колебаний ДУСа (для увеличения ω_n) необходимо K_1 увеличивать. Следовательно, ограничение параметра K_1 согласно (2.7) является недостатком ДУСа с механической пружиной.

Другой недостаток — нестабильность коэффициента усиления $K_Д$ и относительного коэффициента демпфирования $\zeta_Д$ при изменении температуры (вследствие изменения модуля упругости материала пружины и вязкости воздуха). От этих недостатков в значительной мере свободен ДУС с «электрической пружиной».

Датчик угловой скорости с электрической пружиной. Мерой гироскопического момента вокруг выходной оси y, пропорционального угловой скорости $\dot{\psi}$, может служить не только деформация противодействующей механической пружины. Этот момент можно измерить

также при помощи электрической компенсационной схемы, развивающей противодействующий момент вокруг выходной оси y (рис. 2.5). Так как схема выполняет ту же роль, что и механическая пружина, она названа «электрической пружиной».

Схема работает следующим образом. Возникающий при наличии угловой скорости $\dot{\psi}$ гироскопический момент поворачивает кожух гироскопа $Г$ вокруг выходной оси y. Угол поворота β трансформируется индукционным датчиком в пропорциональное напряжение. После усиления и выпрямления это напряжение поступает на моментный датчик $М_д$, развивающий вокруг оси y момент, направленный противоположно гироскопическому. Следовательно, прибор — это система, действующая по замкнутому циклу.

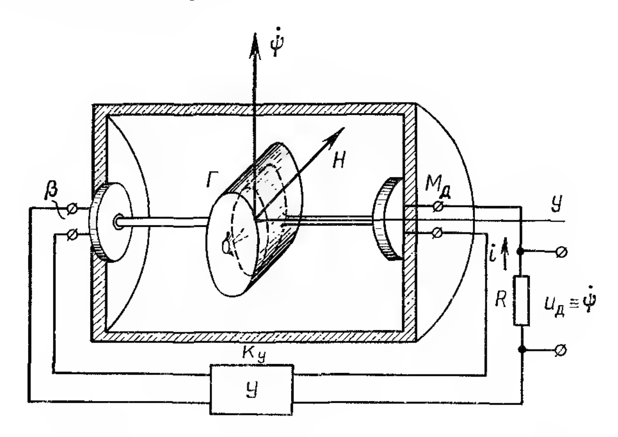


Рис. 2.5. Схема ДУСа с электрической пружиной

В установившемся состоянии развиваемый датчиком $М_д$ момент равен гироскопическому моменту. Но момент моментного датчика пропорционален протекающему через этот датчик току i. Поэтому ток i является мерой гироскопического момента и, следовательно, угловой скорости $\dot{\psi}$. Измеряя падение напряжения $u_д$ на сопротивлении R, получают выходной сигнал прибора, пропорциональный угловой скорости $\dot{\psi}$ объекта.

Замкнутая система осуществляет по углу β статическое регулирование в отношении входной величины $\dot{\psi}$. Однако коэффициент усиления K_1 усилителя выбирается очень большим, что обеспечивает малость коэффициента статизма и, следовательно, угол β_{max}, значительно меньший, чем в случае использования механической пружины (β_{max} определяет ошибку прибора, обусловливаемую угловой скоростью объекта вокруг продольной оси).

Однако в данном случае малость β_{max} не накладывает верхнего ограничения ни на диапазон измеряемых угловых скоростей $\dot{\psi}_{max}$ (он может, например, простираться до 200 град/с), ни на коэффициент усиления по контуру, от которого зависит время затухания свободных

колебаний. Это преимущество обусловливается возможностью измерять гироскопический момент не за счет измерения угла β, а за счет измерения тока i моментного датчика.

Другое важное преимущество — нечувствительность ДУСа к изменению многих физических параметров. Так, при любых параметрах съемного устройства β и усилителя $У$ ток i моментного датчика в установившемся состоянии один и тот же, поскольку определяется лишь гироскопическим моментом $H\dot{\psi}$ и электродинамическим коэффициентом $K_м$ моментного датчика ($H\dot{\psi} = K_м i$). Поэтому высокая стабильность требуется только для параметров $K_м$ и H.

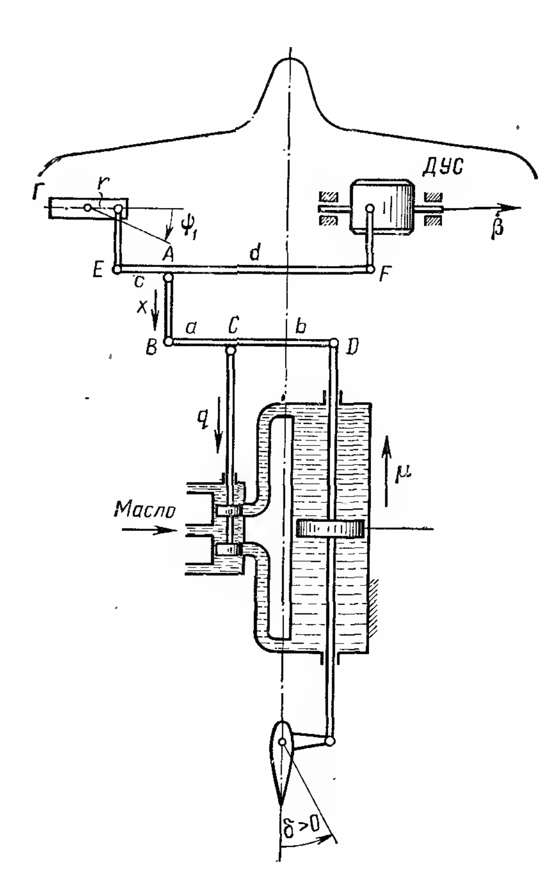


Рис. 2.6. Автопилот со свободным гироскопом и ДУСом

Система «объект — автопилот». Принципиальная схема одного из первых автопилотов со свободным гироскопом и ДУСом (1940 г.) показана на рис. 2.6. Сигналы со свободного гироскопа и ДУСа, возникающие при рыскании объекта, суммируются рычажным дифференциалом EF и суммарный сигнал x поступает на один из входов рычажного дифференциала BD. В остальном схема работает так же, как представленная на рис. 1.14.

Систему уравнений данного автопилота можно получить, добавив к (1.22)÷(1.25) уравнение ДУСа

$$\ddot{\beta} + 2\zeta_Д \omega_n \dot{\beta} + \omega_n^2 \beta = K_Д \omega_n^2 \dot{\psi}, \qquad (2.8)$$

вытекающее из (2.6 а), и уравнение рычажного дифференциала EF. Приняв направления положительного отсчета входных ψ_1 и β и выходной x величин, отмеченные стрелками на рис. 2.6, получим уравнение дифференциала EF

$$x = i_4 \psi + i_5 \beta, \qquad (2.9)$$

где $i_4 = rd/(c + d)$; $i_5 = r_1 c/(c + d)$.

Структурная схема автопилота, составленная на основании указанных уравнений, приведена на рис. 2.7. Добавляя звенья, соответствующие объекту, образуем структурную схему всей системы «объект — автопилот».

Из рис. 2.7 легко получить передаточную функцию автопилота

$$\frac{\hat{\delta}}{\hat{\psi}} = \frac{i_1 i_3 i_4 K_m}{s+i_2 K_m} + \frac{i_1 i_3 i_5 K_Д K_m s}{(T_Д^2 s^2 + 2\zeta_Д T_Д s + 1)(s+i_2 K_m)}. \quad (2.10)$$

Произведем идеализацию автопилота, а именно, пренебрежем постоянной времени ДУСа ($T_Д = 0$). Тогда передаточная функция авто-

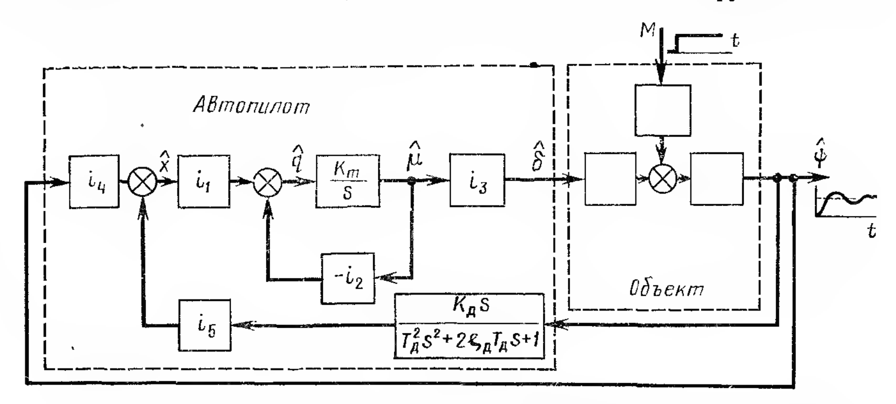


Рис. 2.7. Система «объект — автопилот со свободным гироскопом и ДУСом»

пилота сведется к принимавшемуся при построении корневого годографа виду:

$$\hat{\delta}/\hat{\psi} = (a_0 + a_1 s)/(T_a s + 1).$$

$$(a_0 = i_1 i_3 i_4 K_m; \quad a_1 = i_1 i_3 i_5 K_Д K_m; \quad T_a = 1/i_2 K_m). \quad (2.11)$$

Соответственно изменяется и структурная схема системы «объект — автопилот» (см. рис. 2.1).

Устройство для разворота объекта. Рассмотренные схемы автопилотов не имеют элементов, позволяющих изменять угловое положение объекта от первоначально заданного. Однако самолетные и почти все ракетные автопилоты такие элементы содержат.

Если при развороте объекта вокруг вертикальной оси плоскость крыльев остается горизонтальной, то разворот называется *плоским*, если разворот вокруг вертикальной оси сопровождается поворотом по крену, обеспечивающим нулевое скольжение, — *координированным*. Самолетные автопилоты снабжены устройствами для осуществления координированного разворота, в то время как ракетные имеют приспособления лишь для плоского разворота. При координированном развороте экипаж и пассажиры освобождены от неприятного действия боковых сил, поэтому его используют для самолетов.

Принципиально устройство для плоского разворота может основываться либо на создании прецессии свободного гироскопа при помощи

моментного датчика, либо на использовании поворотной «базы». В настоящее время применяют преимущественно второй способ, так как первый менее точен и сложнее в инструментовке.

Базу *Б* можно представить себе в виде диска (на рис. 2.8 изображена в форме сектора), имеющего возможность свободно поворачиваться относительно корпуса объекта вокруг выходной оси *Г*. С базой *Б* жестко связана обмотка потенциометра, а с выходной осью свободного гироскопа — движок этого потенциометра. Обод базы выполнен в виде колеса червячной пары. Червяк приводится в движение курсовым мотором (электродвигателем) М.

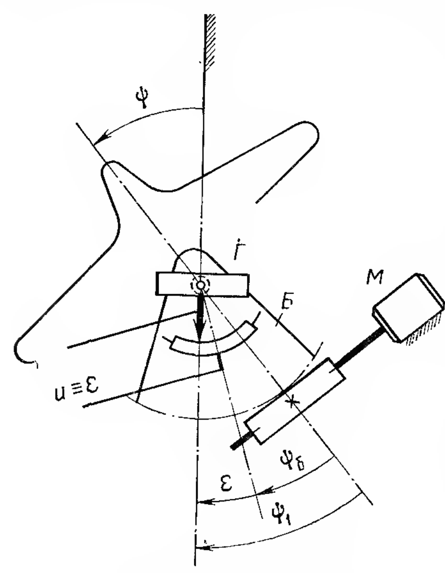


Рис. 2.8. База гироскопа

Сигнал, снимаемый с движка потенциометра (напряжение между движком и средней точкой потенциометра), через усилитель подается на рулевую машинку и отклоняет руль.

При повороте базы (и обмотки потенциометра) курсовым мотором относительно объекта на потенциометре возникает рассогласование, так как движок, будучи связан со свободным гироскопом, не участвует в движении вместе с базой. Поскольку объект и автопилот образуют замкнутую систему и рассогласование на потенциометре служит в этой системе сигналом ошибки, объект (вместе с базой) под действием руля будет разворачиваться в сторону ликвидации рассогласования. По завершении процесса, т. е. при полной ликвидации рассогласования, объект окажется повернутым от первоначального направления на угол, равный углу поворота базы относительно корпуса объекта. Повороты базы и объекта происходят в противоположных направлениях.

Положение базы относительно объекта характеризуется углом $\psi_б$ между продольной осью объекта и средней линией базы, соединяющей точку вращения базы и среднюю точку обмотки потенциометра. Будем отсчитывать $\psi_б$ от продольной оси объекта к средней линии базы, принимая за направление положительного отсчета направление по часовой стрелке. Угол ε рассогласования на потенциометре будем отсчитывать от средней линии базы к точке касания движка с потенциометром, направление положительного отсчета — по часовой стрелке. Угол между продольной осью объекта и движком, как и на рис. 1.3, обозначим через ψ_1. Используя уравнение $\psi_1 = \psi$ гироскопа и рис. 2.8 (на этом рисунке все углы положительные), находим уравнение базы

$$\varepsilon = \psi_1 - \psi_б. \qquad (2.12)$$

Основываясь на уравнении базы и ранее составленной структурной схеме (см. рис. 2.1), можно получить структурную схему системы «объект — автопилот», учитывающую управляющее воздействие $\psi_б$

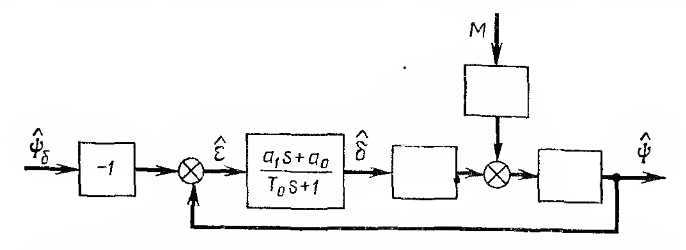


Рис. 2.9. Структурная схема системы «объект — автопилот» при наличии базы гироскопа

Рис. 2.10. Электрогидравлический автопилот:

1 — курсовой гироскоп; *2* — курсовой мотор; *3* — датчик направления; *4* — ДУС; *5* — магнитный усилитель-сумматор; *6* — соленоид; *7* — потенциометр обратной связи; *8* — золотник; *9* — сервомотор; *10* — руль

(рис. 2.9). Такую структурную схему имеет, например, относящаяся к сороковым годам система курсовой стабилизации с суммированием сигналов на магнитном усилителе *5* (рис. 2.10). Для образования сиг-

нала $\dot{\varepsilon} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_б$ на управляющие обмотки магнитного усилителя (МУ) помимо сигнала $\dot{\psi}$ от ДУСа подается напряжение, поступающее на курсовой мотор (сигнал $\dot{\psi}_б$).

При $\psi_б = \text{const}$ (режим стабилизации) структурная схема рис. 2.9 переходит в ранее рассмотренную (см. рис. 2.1).

§ 2.3. АВТОПИЛОТ СО СВОБОДНЫМ ГИРОСКОПОМ И ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ КОНТУРОМ

Схему такого автопилота можно получить из схемы, изображенной на рис. 2.10, заменив курсовой гироскоп *1* и ДУС *4* схемой, представленной на рис. 2.11. В этой схеме *Г* — свободный гироскоп.

С потенциометра снимается напряжение $u_{вх}$, пропорциональное $\varepsilon = \psi - \psi_б$, где ψ — угол рыскания объекта, $\psi_б$ — угол поворота базы. Это напряжение преобразуется дифференцирующим контуром, выходное напряжение $u_{вых}$ которого после предварительного усиления (усилитель *У*) поступает на одну из обмоток управления МУ, показанного на рис. 2.10. Выходное напряжение МУ преобразуется соленоидом *6* в смещение q золотника *8* и при наличии вокруг гидроцилиндра жесткой обратной связи (осуществляется через потенциометр *7* и другую обмотку управления МУ) — в пропорциональное отклонение руля δ.

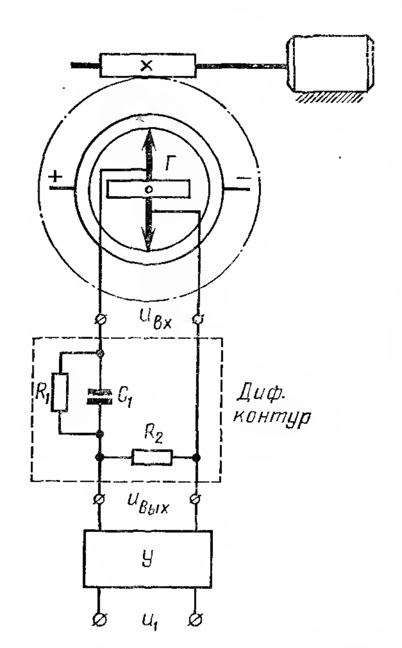


Рис. 2.11. Схема включения дифференцирующего контура

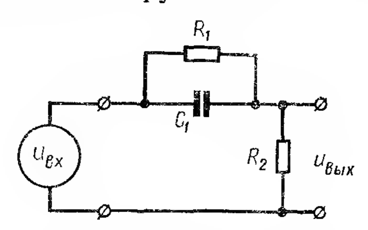


Рис. 2.12. Схема дифференцирующего контура

При конструировании обеспечивают сопротивление обмотки потенциометра базы пренебрежимо малым по сравнению с входным сопротивлением дифференцирующего контура, а выходное сопротивление дифференцирующего контура — пренебрежимо малым по сравнению с входным сопротивлением усилителя *У*. С учетом соотношения сопротивлений можно считать, что дифференцирующий контур питается от источника напряжения с нулевым внутренним сопротивлением и работает на бесконечно малую (т. е. имеющую бесконечно большое сопро-

тивление) нагрузку (рис. 2.12). В этих условиях дифференцирующий контур характеризуется передаточной функцией

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{\text{Д}} s + 1}{\dfrac{T_{\text{Д}} s}{\alpha} + 1}, \tag{2.13}$$

где $T_{\text{Д}} = R_1 C_1$ — постоянная времени; $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$ — коэффициент деления дифференцирующего контура.

Передаточную функцию (2.13) легко вывести по схеме, изображенной на рис. 2.12. Имеем

$$U_{\text{вых}} = I R_2 = \frac{U_{\text{вх}} R_2}{\left[R_2 + \dfrac{R_1/(C_1 s)}{(1/C_1 s) + R_1}\right]}.$$

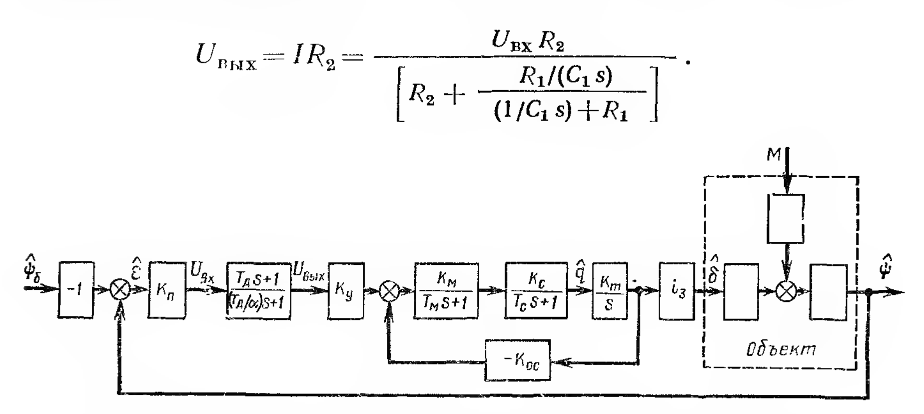


Рис. 2.13. Система «объект — автопилот со свободным гироскопом и дифференцирующим контуром»

Отсюда находим передаточную функцию

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 R_1 C_1 s/(R_1 + R_2) + 1},$$

при обозначениях $T_{\text{Д}}$ и α принимающую вид (2.13).

Если инерционность МУ и соленоида характеризовать постоянными времени $T_{\text{м}}$ и $T_{\text{с}}$, то структурную схему системы «объект — автопилот» можно представить схемой, показанной на рис. 2.13. Исходя из соображений помехоустойчивости системы, коэффициент деления α редко берут больше 20.

Чтобы выявить закон регулирования, лежащий в основе схемы, показанной на рис. 2.13, произведем ее идеализацию. Положив $T_{\text{м}} = T_{\text{с}} = 0$, $\alpha = \infty$ видим, что схема переходит в ранее рассмотренную схему, изображенную на рис. 2.9. Предполагается, что подсадка усиления разомкнутой системы, вызываемая дифференцирующим контуром (множитель $1/\alpha$), компенсирована увеличением в α раз коэффициента усиления усилителя.

§ 2.4. АВТОПИЛОТ С ЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ В ВИДЕ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО ГИРОСКОПА С ВОЗДУШНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ

Свободный гироскоп относится к классу высокопрецизионных дорогостоящих приборов. Поэтому в сороковых годах был создан аналогичный по назначению гироприбор (измеритель угла), основу которого составил не требующий столь тщательной балансировки и более надежный двухстепенный гироскоп. Этот прибор получил название *интегрирующего гироскопа* (информация об угле отклонения объекта получается интегрированием угловой скорости объекта).

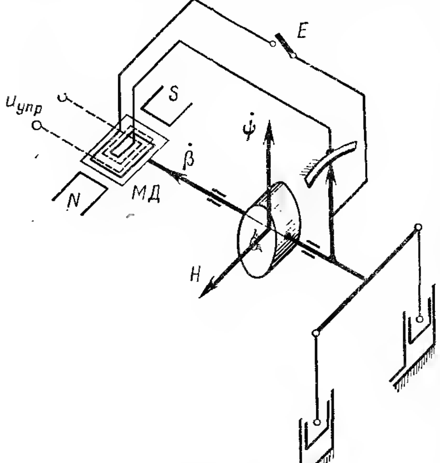


Рис. 2.14. Схема интегрирующего гироскопа с воздушными демпферами

Принципиальная схема интегрирующего гироскопа показана на рис. 2.14. Схема повторяет схему ДУСа (см. рис. 2.4), но не имеет механической противодействующей пружины. Роль пружины выполняет здесь упругость воздуха, сжимаемого под поршнями цилиндров пневматического устройства.

Если K_1— коэффициент, характеризующий упругость воздуха, то по затухании свободных колебаний гироскопический момент $H\dot\psi$ уравновешивается моментом сил упругости, т. е.

$$K_1'\beta_1 = H\dot\psi, \qquad (2.14)$$

где β_1 — угол поворота гироскопа вокруг оси прецессии.

К просадке поршней, определяемой сжатием воздуха согласно уравнению (2.14), добавляется просадка, обусловленная вытеканием воздуха через капилляры цилиндров. Эта дополнительная просадка β_2 прямо пропорциональна объему воздуха V, вытекающего через капилляры, т. е.

$$\beta_2 = K'V. \qquad (2.15)$$

Но объем $V = \int q dt$, где q — расход воздуха через капилляры, см^3/с.

Поскольку расход q пропорционален давлению под поршнями, а давление в свою очередь пропорционально гироскопическому моменту $H\dot\psi$, можно записать, что

$$\beta_2 = K' \int K'' H\dot\psi\, dt = K\psi. \qquad (2.16)$$

Из (2.14) и (2.16) следует, что по затухании свободных колебаний прибора результирующий угол β поворота подвижной части определяется как

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = K_1\dot\psi + K\psi, \qquad (2.17)$$

т. е. пропорционален скорости отклонения объекта и самому отклонению ψ.

Если считать, что собственные колебания интегрирующего гироскопа и рассмотренного ранее ДУСа идентичны, то при учете (2.6а) и (2.17) получим передаточную функцию интегрирующего гироскопа:

$$\frac{\hat{\beta}}{\hat{\psi}} = \frac{K_1 s + K}{s^2/\omega_n^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1} = \frac{K(T_1 s + 1)}{s^2/\omega_n^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1}. \quad (2.18)$$

На рис. 2.15 изображен один из зарубежных образцов интегрирующего гироскопа в разобранном виде. Кожух гироскопа несет крестообразный рычаг, противоположные плечи которого (25 мм) связаны

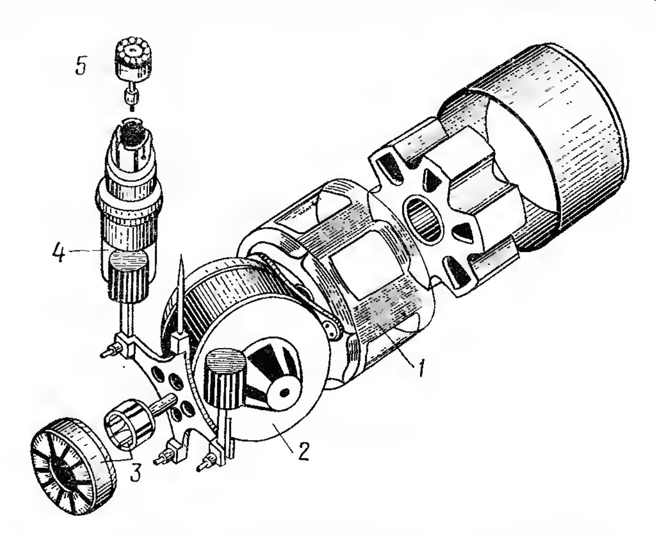


Рис. 2.15. Интегрирующий гироскоп с воздушными демпферами:

1 — датчик момента; *2* — гироскоп; *3* — съемное устройство; *4* — цилиндр и поршень; *5* — винт для регулировки капиллярного отверстия

с поршнями цилиндров (диаметр 18 мм). Цилиндры сообщаются с атмосферой через регулируемые капилляры. На оси прецессии гироскопа помимо индукционного устройства съема угла β есть индукционное дифференцирующее устройство, с выхода которого снимается сигнал $\dot{\beta}$. Габариты прибора 145 × 80 × 100 мм, максимальный угол прецессии $\beta_{max} = \pm 10°$, чувствительность — 0,01 град/с.

При суммировании выходных сигналов обоих съемов выходной сигнал прибора $u_{вых} = K_0\beta + K_1\dot{\beta} = K_0(1 + T_2 s)\beta = K_0 K(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\psi$.

Учитывая собственные колебания, получим для этого случая передаточную функцию интегрирующего гироскопа:

$$\frac{U_{вых}}{\hat{\dot{\psi}}} = \frac{K_и(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(s^2/\omega_n^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1)}. \quad (2.19)$$

Фигурирующие здесь параметры имеют для указанного образца следующие значения: $\omega_1 = 1/T_1 = 0{,}86 \div 13{,}3$ 1/с; $\omega_2 = 1/T_2 \approx 30$ 1/с (можно изменять в широких пределах); $\omega_n = 100$ 1/с; $\zeta = 0{,}15 \div 0{,}7$.

Схему автопилота можно получить из схемы на рис. 2.10, заменив свободный гироскоп *1* и ДУС *4* интегрирующим гироскопом (выходной сигнал $u_{вых} = K_0\beta$ прибора подается на одну из управляющих обмоток МУ). Как и ранее рассмотренные, этот автопилот предназначается для угловой стабилизации объекта. Однако он не может длительное время удерживать объект на заданном курсе, так как в вырабатываемых интегрирующим гироскопом данных об угле ψ накапливается ошибка. Поэтому курс объекта должен корректироваться от какого-либо устройства (от компаса, лучом радиолокационной станции и т. д.).

Когда объект находится на заданном курсе, контакт E разомкнут (см. рис. 2.14), прибор работает в режиме интегрирующего гироскопа, а автопилот — в режиме стабилизации. При необходимости совершить разворот объекта контакт E замыкают и переходят тем самым к прибору в режиме обычного ДУСа с «электрической пружиной». Накладывая при помощи моментного датчика *МД* момент $M_д = K_M u_{упр} = \mathrm{const}$ по оси прецессии y гироскопа, создают вокруг этой оси отклонение β гироскопа. Сигнал β, отклоняя руль, создает угловую скорость объекта $\dot\psi$. Угол β и угловая скорость $\dot\psi$ возрастают до тех пор, пока гироскопический момент $H\dot\psi$ и момент упругости $C\beta$ пневмоэлектрической пружины не уравновесят момент $M_д$ моментного датчика. В установившемся режиме имеем: для гироскопа $M_д = H\dot\psi + C\beta$, $M_д = \mathrm{const}$; для объекта $\dot\psi = K_з\beta$. Исключая из этих уравнений β, находим, что

$$\dot\psi = K_з M_д/(HK_з + C). \qquad (2.20)$$

Таким образом, скорость $\dot\psi$ разворота объекта пропорциональна приложенному моменту. После снятия момента $M_д$ разворот прекращается.

§ 2.5. АВТОПИЛОТЫ С РЕГУЛИРОВАНИЕМ ПО УГЛУ, УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И УГЛОВОМУ УСКОРЕНИЮ

Автопилоты данного класса с большей или меньшей точностью реализуют закон регулирования

$$\delta = a_0\psi + a_1\dot\psi + a_2\ddot\psi. \qquad (2.21)$$

Целесообразность введения воздействия по второй производной видна из сопоставления корневых годографов двух замкнутых систем, автопилоты которых имеют законы регулирования, различающиеся только членом $a_2\ddot\psi$. Если в случае закона $\delta = a_0\psi + a_1\dot\psi$ $(a_1/a_0 = 1/2)$ максимально достижимый коэффициент демпфирования (см. рис. 2.3) $\zeta_0 = \cos\theta_0 = 0{,}283$, то добавление к этому закону члена $a_2\ddot\psi$ $(a_2/a_0 = 1/10)$ позволяет придать относительному коэффициенту демпфирования оптимальное значение $\zeta_{опт} = 0{,}7$ (рис. 2.16). Усиление по кон-

туру K_{v0} может оказаться при этом столь высоким, что статизм регулирования по ψ в отношении внешнего момента M будет пренебрежимо малым [см. (2.4)].

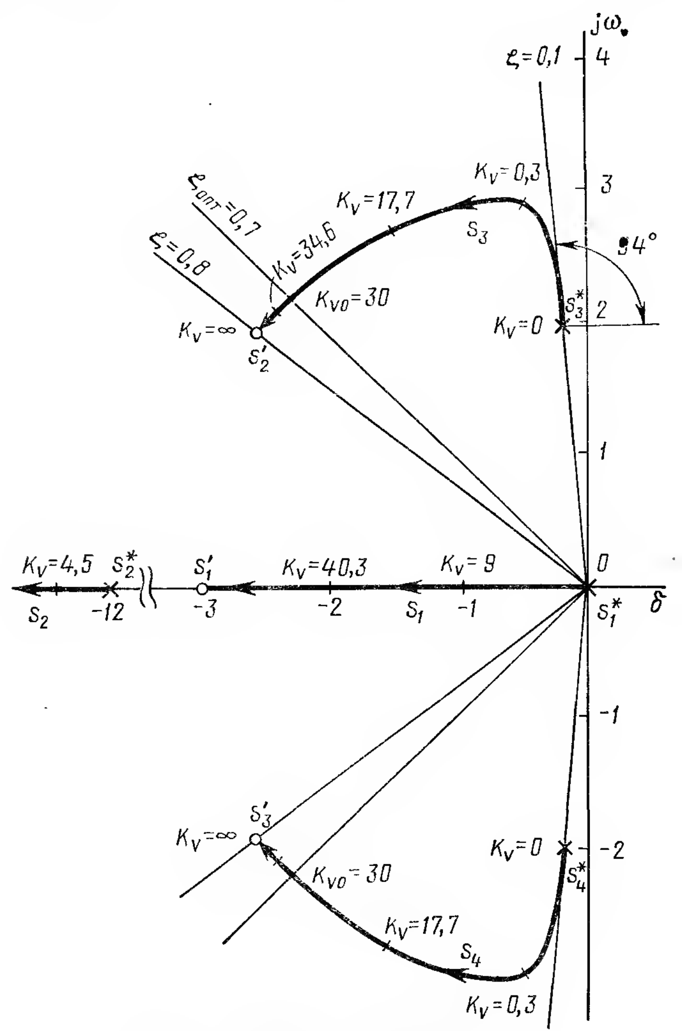


Рис. 2.16. Корневой годограф системы

$$G(s) = \frac{K_v\,(s^2/10 + s/2 + 1)\,(s/3 + 1)}{s\,(s/12 + 1)\,[(s/2)^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot(s/2) + 1]}$$

Примером автопилота с законом регулирования (2.21) может служить рассмотренный в § 2.4 автопилот, если выходным сигналом интегрирующего гироскопа является сумма сигналов позиционного и дифференцирующего съемов. Более широко известные примеры такого автопилота — каналы системы управления баллистической ракеты ФАУ-2.

Глава III

АВТОПИЛОТЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Чтобы система «объект — автопилот» была астатической по ψ в отношении приложенного к объекту внешнего момента m, вводят в закон регулирования слагаемое, пропорциональное интегралу от отклонения объекта ψ. Тогда передаточная функция автопилота содержит интегрирующее звено $1/s$ и, поскольку автопилот находится в цепи обратной связи, т. е. в цепи, соединяющей ψ с точкой приложения m, то по ψ в отношении m осуществляется астатическое регулирование (рис 3.1).

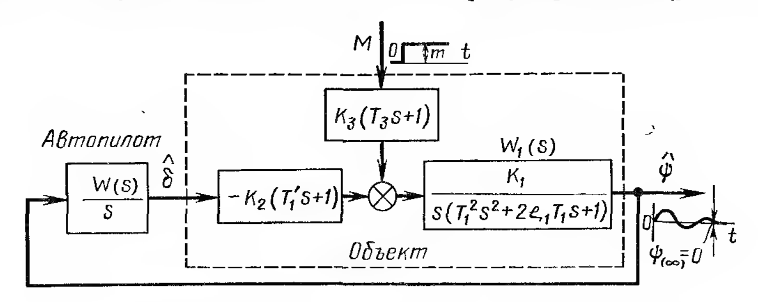


Рис. 3.1. Система «объект — автопилот с интегральным управлением»

Действительно, согласно рис. 3.1, передаточная функция, связывающая M с $\hat{\psi}$, имеет вид

$$\frac{\hat{\psi}}{M}=\frac{K_1 K_3 (T_3 s+1)}{s(T_1^2 s^2+2\zeta_1 T_1 s+1)+W(s) K_1 K_2 (T_1' s+1)/s}=\Phi_M(s).$$

При $m=\text{const}$ установившееся значение отклонения объекта от заданного курса

$$\psi(\infty)=\Phi_M(0)\,m=$$
$$=\left.\frac{K_1 K_3 s (T_3 s+1)}{s^2 (T_1^2 s^2+2\zeta_1 T_1 s+1)+K_1 K_2 W(s)(T_1' s+1)}\right|_{s=0}\cdot m=0.$$

Отсутствие установившегося отклонения ($\psi(\infty)=0$ при $m=\text{const}$) указывает на астатизм регулирования по ψ в отношении m.

Астатизм необходим для объектов, направление движения которых задают первоначальным прицеливанием (например, для несамонаводя-

щихся морских торпед). Астатизм желателен в системе автоматической стабилизации самолета в продольной плоскости (изменение центровки самолета не будет приводить к изменению угла тангажа), а также во многих других системах управления.

Возможно несколько законов регулирования с интегральным членом. Некоторые законы и реализующие их автопилоты рассматриваются ниже.

§ 3.1. АВТОПИЛОТ С РЕГУЛИРОВАНИЕМ ПО ИНТЕГРАЛУ

В этом автопилоте реализуется закон регулирования

$$\delta = a_{-1} \int \psi dt. \tag{3.1}$$

Схема автопилота может быть получена из схемы, показанной на рис. 1.14, если устранить жесткую обратную связь вокруг гидроцилиндра, представляющего собой интегрирующее звено. Обратной связи не будет, если плечо a коромысла BD сделать равным нулю. Тогда коромысло BD перестает играть в схеме какую-либо роль и его можно удалить. В результате получим схему автопилота без обратной связи (рис. 3.2), реализующего закон регулирования (3.1). Структурная схема соответствующей системы «объект — автопилот» отличается от схемы, изображенной на рис. 1.17, отсутствием обратной связи $i_2 = a/(a+b)$. Из этой схемы легко найти передаточную функцию системы «объект—автопилот» в разомкнутом состоянии:

$$G(s) = \frac{K_a (T_1' s + 1)}{s^2 (T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1)}, \tag{3.2}$$

где

$$K_a = K_1 K_2 K_m i_1 i_3; \quad i_1 = r.$$

Если демпфирование объекта мало, а $T_1' < T_1$ (статически устойчивый летательный объект, движущийся с большой скоростью), то система «объект —

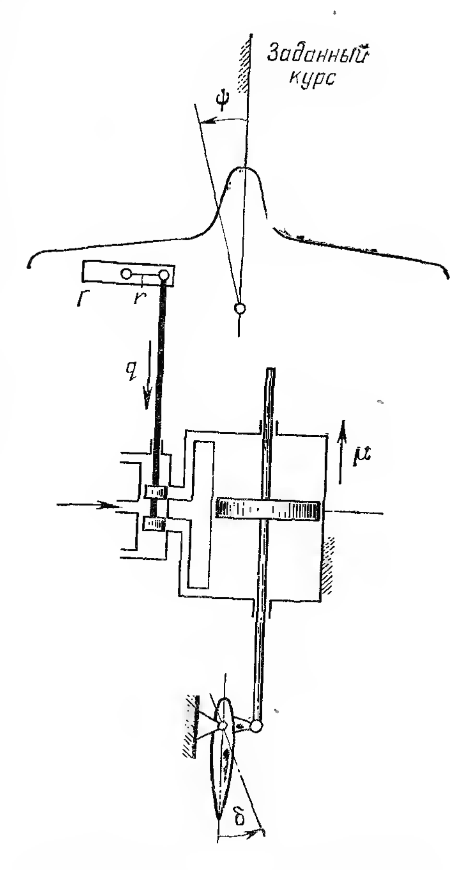


Рис. 3.2. Схема автопилота без обратной связи

автопилот» оказывается неустойчивой при очень малом коэффициенте усиления K_a по контуру. Это видно из корневого годографа соответствующей замкнутой системы (рис. 3.3). Следовательно, для летательного объекта автопилот без обратной связи практически непригоден.

Обратимся теперь к формулам (1.13), выражающим постоянные времени и коэффициент демпфирования объекта через аэродинамические и массовые параметры. Нетрудно видеть, что с ростом коэффициента

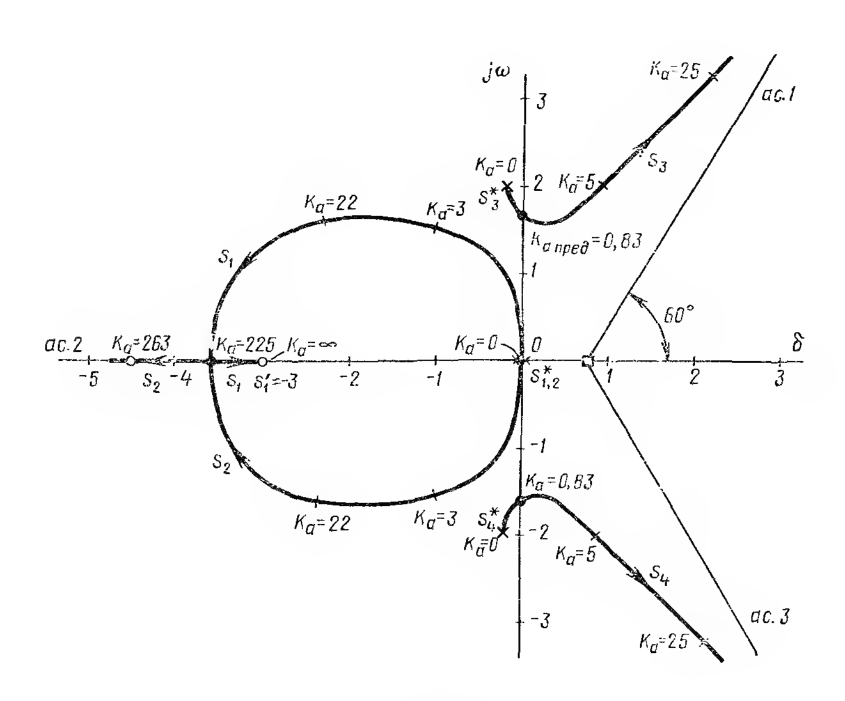


Рис. 3.3. Корневой годограф

$$G(s)=\frac{K_a(s/3+1)}{s^2[(s/2)^2+2\cdot 0{,}1\,(s/2)+1]}$$

естественного демпфирования D постоянная T_1 убывает, параметр ζ_1 возрастает, а постоянная T_1' остается без изменения. Следовательно, при движении объекта в достаточно плотной среде (например, в воде) между постоянными времени имеет место соотношение $T_1' > T_1$, а относительный коэффициент демпфирования ζ_1 принимает большое значение. Корневой годограф, построенный для этого случая (рис. 3.4), указывает, что в определенном диапазоне значений коэффициента усиления K_a замкнутая система «объект — автопилот» устойчива. Это обстоятельство позволило применить автопилот без обратной связи для стабилизации морских торпед на заданном курсе (направляющий аппарат Обри, предложенный в 1896 г. и нашедший применение на всех

флотах мира). Принципиальная схема направляющего аппарата торпеды отличается от показанной на рис. 3.2 тем, что вместо гидравлической применена пневматическая рулевая машинка.

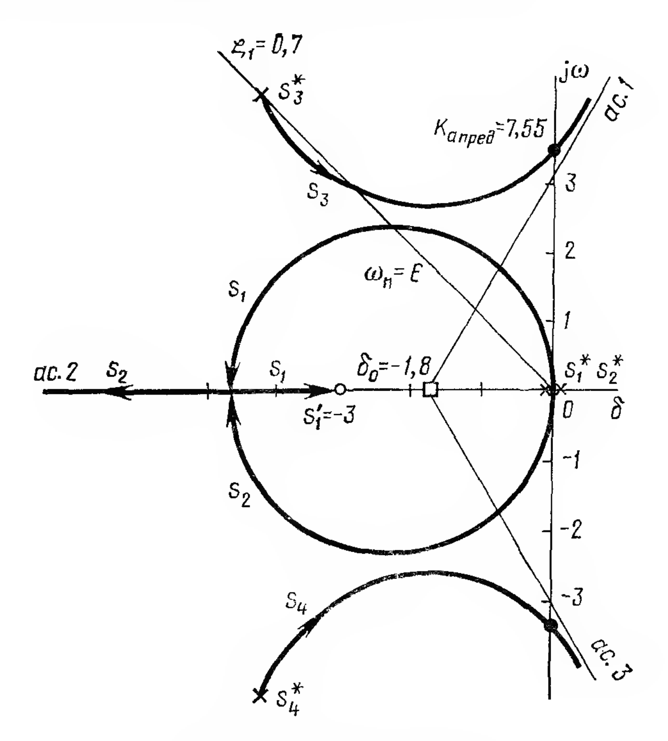


Рис. 3.4. Корневой годограф

$$G(s)=\frac{K_a\,(s/3+1)}{s^2\,[(s/6)^2+2\cdot 0{,}7\,(s/6)+1]}$$

§ 3.2. АВТОПИЛОТ С РЕГУЛИРОВАНИЕМ ПО ИНТЕГРАЛУ И УГЛУ ОТКЛОНЕНИЯ

Этот автопилот при идеальном исполнении реализует закон регулирования

$$\delta=a_{-1}\int\psi\,dt+a_0\psi \tag{3.3}$$

и следовательно, имеет передаточную функцию

$$\hat{\delta}/\hat{\psi}=(a_{-1}+a_0\,s)/s=a_{-1}\,(T_a'\,s+1)/s. \tag{3.4}$$

Подключая автопилот к колебательному объекту, получим замкнутую систему «объект — автопилот» с передаточной функцией по контуру

$$G(s)=K_a\,(T_a'\,s+1)\,(T_1'\,s+1)/[s^2\,(T_1^2\,s^2+2\zeta_1\,T_1\,s+1)]. \tag{3.5}$$

Если принять объект с параметрами, использованными на рис. 3.3, а автопилот характеризовать постоянной $T_a' = 1$ с, то корневой годограф системы «объект — автопилот» принимает вид, показанный на рис. 3.5. Сопоставляя с корневым годографом на рис. 3.3, видим, что автопилот (3.3) не дает расширения диапазона устойчивости по коэффициенту усиления K_a. Этого, однако, нельзя сказать относительно рассматриваемой ниже практической реализации автопилота (3.3).

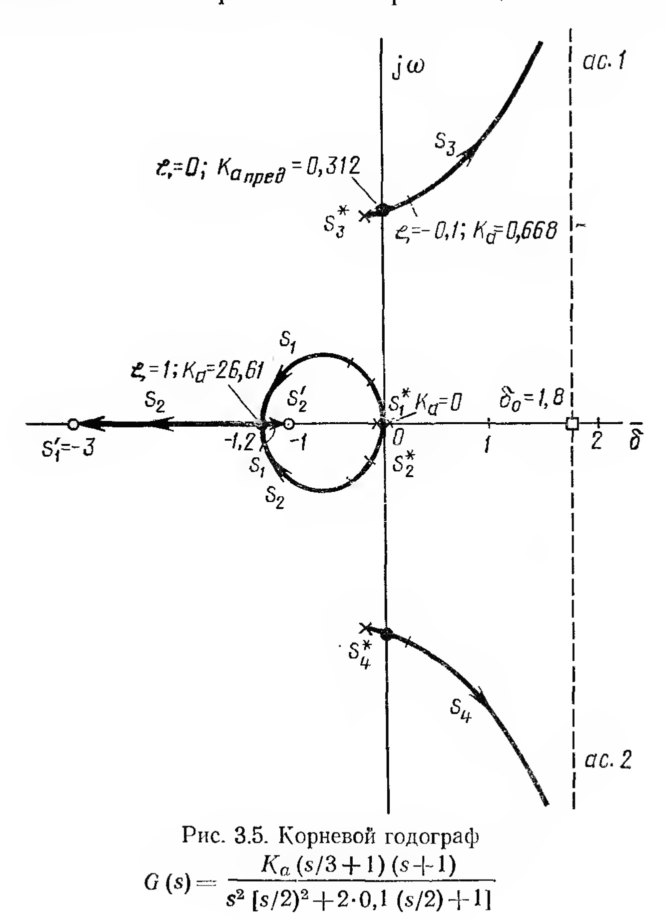


Рис. 3.5. Корневой годограф

$$G(s) = \frac{K_a (s/3+1)(s+1)}{s^2 [s/2)^2 + 2\cdot 0{,}1 (s/2) + 1]}$$

Автопилот с гибкой обратной связью. Примером автопилота, осуществляющего закон регулирования (3.3), может служить автопилот с гибкой обратной связью (рис. 3.6). Схема этого автопилота отличается от показанной на рис. 1.14 схемы с жесткой обратной связью наличием изодромного устройства. Это устройство (см. рис. 3.6) состоит из небольшого гидроцилиндра *G* с регулируемым при помощи крана *H* перепуском между полостями, позволяющего изменяться расстоянию между концом *D* коромысла и поршнем сервомотора *M*, и пружины *K*, предназначенной удерживать точку *D* в неизменном по отноше-

нию к корпусу объекта положении. Изодромное устройство обеспечивает астатическое регулирование по ψ в отношении действующего на объект внешнего момента m.

При возникновении $m = \text{const}$ по всем координатам системы возбуждается переходный процесс, который в устойчивой системе через некоторое время завершится. В новом установившемся состоянии, когда все элементы схемы находятся в покое, руль отклонен на угол, достаточный для компенсации внешнего момента $m = \text{const}$. Конец D коромысла занимает по отношению к корпусу объекта то же положение, что и до возникновения m, так как в установившемся состоянии пружина K ненапряжена (указанные положения руля и точки D возможны, так как расстояние между точкой D и кронштейном руля может меняться за счет нового положения поршня изодрома по отношению к его цилиндру G). Конец B коромысла AB занимает по отношению к корпусу объекта также прежнее положение, ибо в противном случае золотник $з$ был бы смещен от нейтрального положения и установившееся состояние было бы невозможно. Таким образом, коромысло BD в новом установившемся состоянии занимает по отношению к объекту то же положение, что и до приложения момента $m = \text{const}$. То же самое можно сказать и о гироскопе $Г$, связанном с коромыслом через тягу AB. Одинаковость углового положения гироскопа $Г$ по отношению к корпусу объекта в двух установившихся состояниях (до и после приложения $m = \text{const}$) указывает, что в новом установившемся состоянии какое-либо отклонение $\psi(\infty)$ объекта от заданного курса не существует, т. е. по ψ в отношении m осуществляется астатическое (или, как его иногда называют, изодромное) регулирование.

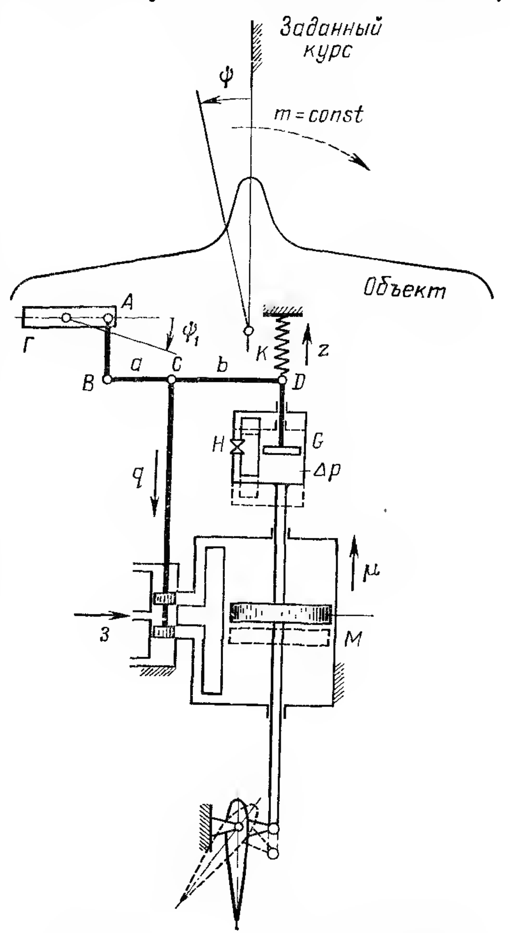


Рис. 3.6. Схема автопилота с гибкой обратной связью

В переходном процессе масло вследствие вязкости не может мгновенно перетекать через перепуск из одной полости изодрома в другую.

Поэтому движение поршня сервомотора в той или иной мере (что зависит от степени открытия перепуска изодрома) передается на коромысло BD, благодаря чему вокруг гидроцилиндра осуществляется отрицательная обратная связь. В установившемся состоянии эта обратная связь исчезает, что послужило поводом называть ее исчезающей или гибкой.

Уравнения движения и структурная схема. Если пренебречь массой коромысла BD, трением в его шарнирах и в золотнике, то можно представленную на рис. 3.6 схему считать состоящей из следующих звеньев направленного действия: объект *Об*, гироскоп *Г*, золотник *з*, сервомотор *М*, изодром *G*, *K*. Принимая те же направления положительного отсчета координат, что на рис. 1.14 (дополнительная координата z, характеризующая положение поршня изодрома относительно корпуса объекта, отсчитывается кверху), можно по изложенной в § 1.1 методике составить уравнения малых колебаний системы около положения равновесия. Однако многие элементы в системах на рис. 1.14 и 3.6 одинаковы, что позволяет воспользоваться уравнениями, уже составленными в § 1.3.

Из уравнения (1.23), заменив μ на z, получим уравнение золотника

$$q = i_1\psi - i_2 z. \qquad (3.6)$$

Уравнения сервомотора (1.24) и руля (1.25) остаются без изменения.

Выведем теперь уравнение изодрома. Входной величиной изодрома является скорость поршня сервомотора $\dot{\mu}$, а выходной — смещение z точки D от равновесного положения. При положительной скорости $\dot{\mu}$ на поршне изодрома возникает перепад давлений Δp, благодаря которому на этот поршень действует сила $S\Delta p$, направленная вверх (S — площадь поршня изодрома). При положительном смещении z на поршень действует сила пружины, направленная вниз (K — жесткость пружины). Учитывая направление положительного отсчета z, на основании второго закона Ньютона получаем уравнение движения поршня изодрома

$$m\ddot{z} = S\Delta p - Kz, \qquad (3.7)$$

где m — масса поршня.

Расход масла через перепуск

$$v = H\Delta p, \qquad (3.8)$$

где H — гидравлическая проводимость перепуска, зависящая от положения крана.

При учете несжимаемости масла

$$v = S(\dot{\mu} - \dot{z}). \qquad (3.9)$$

Тогда из (3.8), (3.9) находим, что

$$\Delta p = S(\dot{\mu} - \dot{z})/H. \qquad (3.10)$$

Подставляя это выражение в (3.7) и вводя $h = S^2/H$, получаем следующее уравнение изодрома:

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + Kz = h\dot{\mu}. \qquad (3.11)$$

На рис. 3.7 показана структурная схема автопилота, составленная по уравнениям (3.6), (1.24), (1.25), (3.11). Из этой схемы легко найти передаточную функцию автопилота:

$$\frac{\hat{\delta}}{\hat{\psi}} = W_a(s) = i_1 i_3 \frac{K_m/s}{\{1+[i_2 hK_m/(ms^2+hs+K)]} =$$

$$= \frac{i_1 i_3 K_m (ms^2+hs+K)}{s(ms^2+hs+K+i_2hK_m)}. \qquad (3.12)$$

Как это и должно быть, передаточная функция содержит интегрирующее звено $1/s$, что и обеспечивает в замкнутой системе «объект — автопилот» астатизм регулирования по ψ в отношении m (автопилот находится в цепи обратной связи, выделяемой величинами $\hat{\psi}$ и M — см. рис. 3.7).

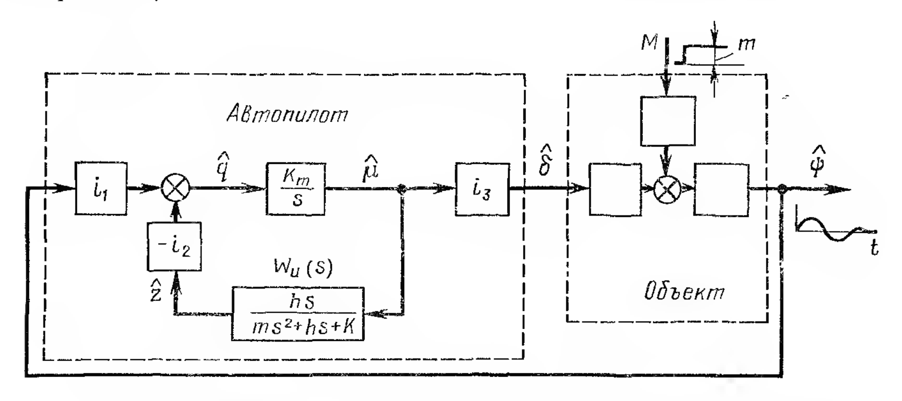


Рис. 3.7. Система «объект — автопилот с гибкой обратной связью»

Предельные случаи. Рассмотрим случаи предельных состояний перепуска изодрома. Если перепуск полностью перекрыт краном, то его проводимость $H = 0$ и $h = S^2/H = \infty$. Тогда передаточная функция изодрома $hs/(ms^2 + hs + K)$ вырождается в единицу, и структурная схема на рис. 3.7 переходит в структурную схему на рис. 1.17, соответствующую случаю автопилота с жесткой обратной связью. Регулирование по ψ в отношении m становится статическим.

В другом предельном случае, когда кран перепуска полностью открыт, $H = \infty$ и $h = S^2/H = 0$. Передаточная функция изодрома обращается в нуль, т. е. цепь обратной связи вокруг гидроцилиндра рулевой машинки разрывается. Структурная схема на рис. 3.7 переходит в схему, соответствующую использованию автопилота без обратной связи (см. рис. 3.2).

Соответственно изменяется и диапазон допустимых значений коэффициента усиления по контуру системы «объект — автопилот». При больших значениях h этот диапазон широкий, как это свойственно системе, в которой используется автопилот с жесткой обратной связью. При малых h диапазон узкий, что характерно для системы с автопилотом (3.1) без обратной связи.

§ 3.3. АВТОПИЛОТ С РЕГУЛИРОВАНИЕМ ПО ИНТЕГРАЛУ, УГЛУ И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Закон регулирования, лежащий в основе этого автопилота, имеет вид

$$\delta = a_{-1} \int \psi \, dt + a_0 \psi + a_1 \dot{\psi}. \tag{3.13}$$

Поэтому идеальный автопилот характеризуется передаточной функцией

$$\hat{\delta}/\hat{\psi} = a_{-1}/s + a_0 + a_1 s = \\ = a_{-1} (T_a'^2 s^2 + 2\zeta_a' T_a' s + 1)/s. \tag{3.14}$$

Вместе с колебательным объектом этот автопилот образует замкнутую систему, имеющую в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$G(s) = \frac{K_a (T_a'^2 s^2 + 2\zeta_a' T_a' s + 1)(T_1' s + 1)}{s^2 (T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1)}. \tag{3.15}$$

Вследствие наличия в передаточной функции автопилота интегрирующего звена $1/s$ этот автопилот, как и два предыдущие, обеспечивает астатическое регулирование по отклонению объекта ψ в отношении внешнего возмущения m.

Корневой годограф замкнутой системы, построенный с использованием функции (3.15) при прежних значениях параметров объекта (см. рис. 3.3 и 3.5) и при параметрах автопилота $T_a' = T_1$, $\zeta_a' = 0{,}8$, показан на рис. 3.8. Как видно из корневого годографа, замкнутая система остается устойчивой при любом значении коэффициента усиления K_a. Более того, выбором K_a можно этой системе придать желаемое демпфирование $\zeta_{\text{опт}} = 0{,}7$. Сопоставляя корневые годографы на рис. 3.5 и 3.8, видим, что дополнение закона регулирования членом $a_1\dot{\psi}$ существенно улучшает качество замкнутой системы.

Примером автопилота с законом регулирования (3.13) может служить автопилот, имеющий в качестве чувствительного элемента двухстепенный гироскоп со специальной электрической пружиной. Специфика электрической схемы гироскопа состоит в том, что она интегрирует и дифференцирует угловую скорость, измеряемую гироскопом. Результирующий сигнал, выдаваемый прибором, интегрируется рулевой машинкой, благодаря чему и реализуется закон регулирования (3.13).

Применение двухстепенного гироскопа вместо трехстепенного (свободного) весьма желательно, так как удешевляет систему стабилизации и делает ее более надежной. Но нельзя упускать из вида недостаток этой системы, заключающийся в том, что вследствие накапливания ошибки она не может длительное время удерживать объект на заданном курсе (см. § 2.4).

Схема двухстепенного гироскопа со специальной электрической пружиной показана на рис. 3.9. Обозначим через β угол поворота гироскопа

вокруг оси прецессии, а через $u_{aa'}$ — напряжение между движками потенциометрического устройства, связанного с этой осью. Рассматривая потенциометрическое устройство как источник напряжения с нулевым внутренним сопротивлением, пренебрегая индуктивностью обмоток и учитывая, что $|R_2 + 1/C_2 s + R_{\text{к п}}| \gg R_1 + R_{\text{к}}$, для тока, протекающего через обмотку $R_{\text{к}}$ электромагнитного механизма, получим

$$I^* = \frac{U_{aa'}}{R_1 + R_{\text{к}} + 1/C_1 s} = \frac{C_1 s}{T_1 s + 1} K_{\text{П}} \hat{\beta}, \tag{3.16}$$

где

$$U_{aa'} = K_{\text{П}} \hat{\beta} \quad \text{и} \quad T_1 = (R_1 + R_{\text{к}}) C_1. \tag{3.17}$$

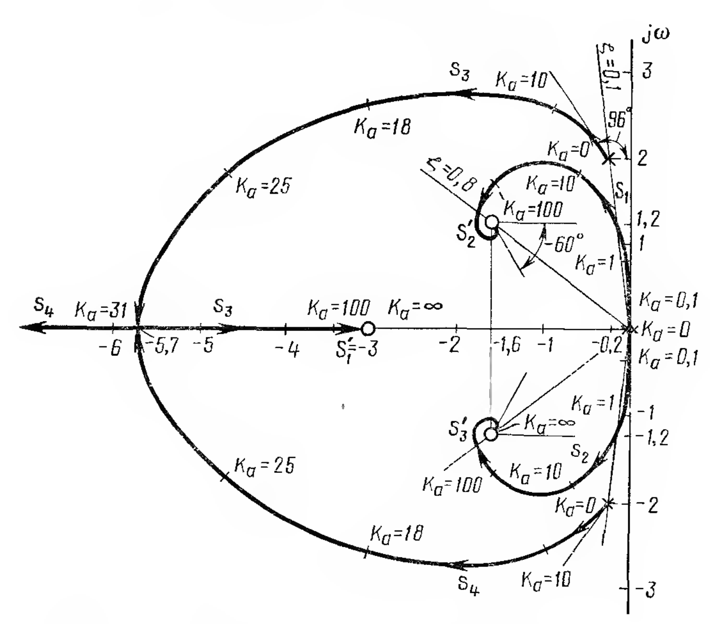


Рис. 3.8. Корневой годограф системы

$$G(s) = \frac{K_a\,[(s/2)^2 + 2\cdot 0{,}8\cdot(s/2) + 1]\,(s/3+1)}{s^2\,[(s/2)^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot(s/2) + 1]}$$

Считая, что в любой момент времени гироскопический момент $H\dot{\psi}$ уравновешивается моментом $K_э I^*$, развиваемым вокруг оси прецессии электромагнитным механизмом, и принимая во внимание выражение I^*, находим

$$Hs\hat{\psi} = K_э \frac{C_1 s}{T_1 s + 1} K_{\text{П}} \hat{\beta}. \tag{3.18}$$

Отсюда выражение угла поворота гироскопа через угол ψ отклонения объекта

$$\beta = a'_{-1}\,\psi + a'_0 \dot{\psi}, \tag{3.19}$$

где

$$a'_{-1} = H/\,(C_1 K_{\text{П}} K_э); \quad a'_0 = T_1 H/(C_1 K_{\text{П}} K_э). \tag{3.20}$$

Таким образом, электромеханическая часть прибора функционирует как интегрирующий гироскоп.

Вычислим теперь напряжение между клеммами b и b', используя выражения (3.16) ÷ (3.20):

$$U_{bb'} = (R_1 + R_к) I^* = (R_1 + R_к) \frac{C_1 K_П s}{T_1 s + 1} \left[\frac{H}{C_1 K_П K_э} \hat{\psi} + \frac{T_1 H}{C_1 K_П K_э} s\hat{\psi} \right] =$$

$$= \frac{T_1 s}{T_1 s + 1} \cdot \frac{H}{C_1 K_э} (1 + T_1 s) \hat{\psi} = \frac{T_1 H}{C_1 K_э} s\hat{\psi}. \qquad (3.21)$$

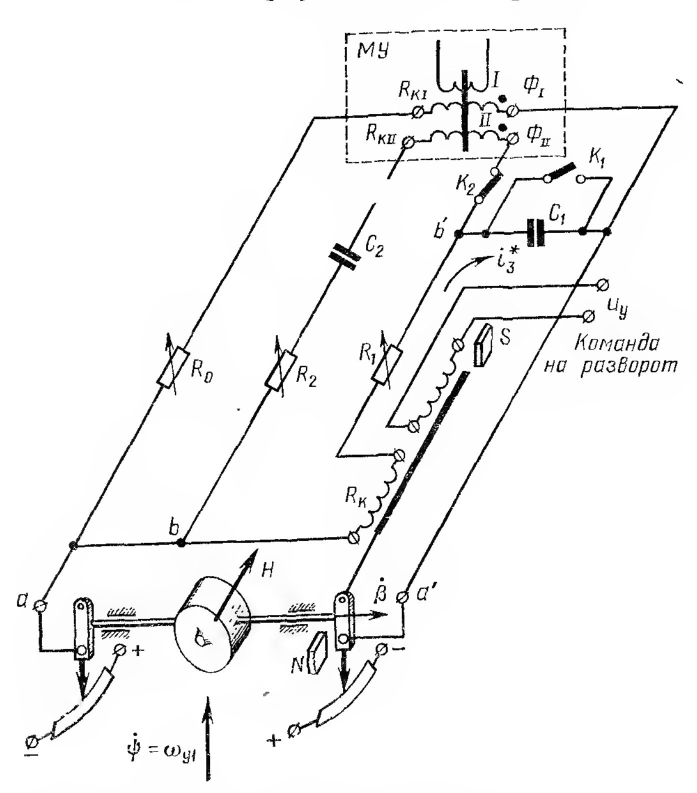


Рис. 3.9. Двухстепенный гироскоп со специальной электрической пружиной

Следовательно, напряжение $U_{bb'}$ пропорционально угловой скорости объекта $\dot{\psi}$. Это напряжение создает в обмотке управления II МУ ток

$$I_{кII} = \frac{U_{bb'}}{R_2 + R_{кII} + 1/C_2 s} = \frac{T_1 H}{C_1 K_э} \cdot \frac{C_2 s^2}{(T_2 s + 1)} \hat{\psi},$$

где
$$T_2 = (R_2 + R_{к\,II}) C_2.$$

Пренебрегая влиянием постоянной времени T_2, видим, что ток $i_{\text{к II}}$ и магнитный поток Φ_{II} обмотки управления II пропорциональны угловому ускорению объекта $\ddot{\psi}$.

Из схемы, показанной на рис. 3.9, легко определить ток в обмотке управления I МУ:

$$I_{\text{кI}} = \frac{U_{aa'}}{R_0 + R_{\text{кI}}} = \frac{K_{\text{П}}}{R_0 + R_{\text{кI}}} (a'_{-1} \hat{\psi} + a'_0 s\hat{\psi}). \tag{3.22}$$

Следовательно, поступающий на входы магнитного усилителя полный управляющий сигнал

$$\Phi_{\text{I}} + \Phi_{\text{II}} = a''_{-1} \psi + a''_0 \dot{\psi} + a''_1 \ddot{\psi}. \tag{3.23}$$

Для осуществления закона регулирования (3.13) рулевая машинка должна представлять собой интегрирующее звено, т. е. должна характеризоваться передаточной функцией K_m/s. Это будет иметь место, если автопилот выполнен согласно схеме, изображенной на рис. 2.10, с тем, однако, отличием, что на две управляющие обмотки МУ сигналы подаются от рассмотренного выше чувствительного элемента (см. рис. 3.9), а цепь обратной связи, вокруг рулевой машинки, реализованная на рис. 2.10 потенциометром 7 и третьей обмоткой управления, отсутствует. Рулевая машина, интегрируя входной сигнал (3.23), отклоняет руль согласно закону

$$\delta = a_{-1} \int \psi dt + a_0 \psi + a_1 \dot{\psi}.$$

Разворот объекта можно осуществить, превратив чувствительный элемент путем переключения контактов K_1, K_2 (K_1 должен быть замкнут, а K_2 разомкнут) в обычный ДУС. Подавая на вторую обмотку электромагнитного механизма управляющее напряжение $u_{\text{у}}$ и создавая тем самым вокруг оси прецессии момент $M_{\text{Д}} = \text{const}$, создадим, как было показано в § 2.4, угловую скорость объекта $\dot{\psi} = K_0 M_{\text{Д}}$.

Глава IV

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Стабилизация углового положения ЛА производится летчиком или автопилотом по отношению к некоторой системе отсчета $x_0y_0z_0$, называемой «неподвижной» системой координат. Чтобы характеризовать положение корпуса объекта (аппарата) в неподвижной системе определенными углами, в рассмотрение вводится связанная система координат.

§ 4.1. НЕПОДВИЖНАЯ И СВЯЗАННАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Понятие «неподвижной» системы координат определяется видом чувствительных элементов, имеющихся в распоряжении летчика или примененных в автопилоте.

Для самолета чувствительными элементами служат гироскопические приборы, корректируемые относительно местной вертикали и направления север — юг (гировертикаль и курсовой гироскоп или трехосная гироплатформа, корректируемая в горизонте и по странам света). Поэтому для самолета в качестве неподвижной системы координат принимают *земную систему координат* $x_0y_0z_0$. Началом этой системы служит точка земной поверхности, в которую проектируется центр тяжести ЛА, ось y_0 направлена по местной вертикали вверх, а оси x_0, z_0 фиксируются в горизонтальной плоскости так, чтобы образовалась правая прямоугольная система координат. Если ось x_0 направлена на север, земную систему называют географической системой координат.

Баллистическая ракета стартует вертикально вверх и на активном участке траектории (участок работы ракетного двигателя, длящийся несколько десятков секунд) совершает в плоскости стрельбы программный разворот, наклоняясь к горизонту в конце активного участка примерно на 45°. После выключения ракетного двигателя и аппаратуры управления ракета летит как свободное тело (пассивный участок траектории). Чувствительными элементами автопилота ракеты служат либо некорректируемые свободные гироскопы (гировертикант, гирогоризонт), либо некорректируемая трехосная гироплатформа. Эти гироскопические устройства, в отличие от самолетных, сохраняют в процессе полета неизменной угловую ориентацию, заданную им в момент старта. Поэтому для баллистической ракеты в качестве неподвижной системы координат принимают *стартовую систему координат* $x_0y_0z_0$, которую определяют так же, как и земную, но не для текущего местоположения ракеты, а для точки ее старта. Отличие заключается также в ориента-

ции оси x_0, которую располагают в плоскости стрельбы и направляют в сторону цели.

При изучении углового движения самолета или баллистической ракеты на активном участке траектории определенные выше земную и стартовую системы координат $x_0y_0z_0$ рассматривают как инерциальные системы. В действительности, конечно, ни земная, ни стартовая системы не являются инерциальными системами координат, так как участвуют во вращении Земли (а земная система имеет еще угловую скорость из-за кривизны огибаемой самолетом поверхности Земли). Но дополнительные инерционные силы, возникающие благодаря указанным переносным движениям системы $x_0y_0z_0$, весьма малы и ими обычно пренебрегают.

Связанную систему координат $x_1y_1z_1$ определяют как систему, жестко связанную с объектом. Начало этой системы помещают в центре тяжести объекта, а ось x_1 всегда направляют вдоль продольной оси объекта в сторону носка. Ось y_1 лежит в вертикальной плоскости симметрии самолета и направлена вверх, ось z_1 направлена по правому крылу. Для баллистической ракеты оси y_1 и z_1 лежат в плоскостях, определяемых соответственно плоскостями вертикального и горизонтального оперения, см. рис. 5.2.

§ 4.2. УГЛЫ ЭЙЛЕРА

Чтобы определить угловое положение связанной системы $x_1y_1z_1$ (и, следовательно, объекта) относительно неподвижной системы $x_0y_0z_0$, совмещают начала обоих систем параллельным переносом осей $x_0y_0z_0$. Тогда положение связанной системы $x_1y_1z_1$ в неподвижной $x_0y_0z_0$ может быть полностью характеризовано заданием трех углов ψ, ϑ, γ, называемых *углами Эйлера*. Последовательно поворачивая связанную систему на каждый из углов Эйлера, можно прийти к любому угловому положению связанной системы $x_1y_1z_1$ относительно неподвижной $x_0y_0z_0$. Характерная особенность углов Эйлера заключается в независимости их друг от друга, т. е. вращение по одному углу не изменяет двух других. Углы Эйлера некоммутативны, так что должна строго соблюдаться заранее установленная последовательность упомянутых поворотов.

Рассмотрим последовательность поворотов, обычно принимаемую для самолета (считаем, что первоначально оси системы $x_1y_1z_1$ совпадают с соответственными осями системы $x_0y_0z_0$). Первый поворот системы $x_1y_1z_1$ производят вокруг вертикальной оси y_0 неподвижной системы на угол рыскания ψ. Так как в рассмотрение вводятся положительные углы Эйлера, то угловая скорость $\dot{\psi}$ должна быть положительной, т. е. вектор $\dot{\psi}$ должен совпадать с положительным направлением оси y_0 (рис. 4.1). Второй поворот осуществляют вокруг нового положения z_1' сси z_1 связанной системы (ось z_1' называют *линией узлов*) на угол тангажа ϑ. Вектор угловой скорости $\dot{\vartheta}$ должен быть направлен при этом в положительном направлении оси z_1'. Последний, третий поворот производят вокруг продольной оси x_1 объекта на угол крена γ (угловая

скорость $\dot{\gamma}$ должна быть при этом в положительном направлении оси x_1). Образующиеся в результате указанных поворотов положительные углы Эйлера отмечены на рис. 4.1 утолщенными дугами.

Каждый из углов Эйлера ЛА имеет (что уже отмечалось) свое название и, как это видно из рис. 4.1, определяется для самолета следующим образом. Угол рыскания ψ есть угол между осью x_0 земной системы и проекцией продольной оси самолета x_1 на горизонтальную плоскость x_0z_0. Угол тангажа ϑ представляет собой угол, составленный продольной осью x_1 с горизонтальной плоскостью x_0z_0. Угол крена γ есть угол между вертикальной плоскостью y_0x_1, проходящей через продоль-

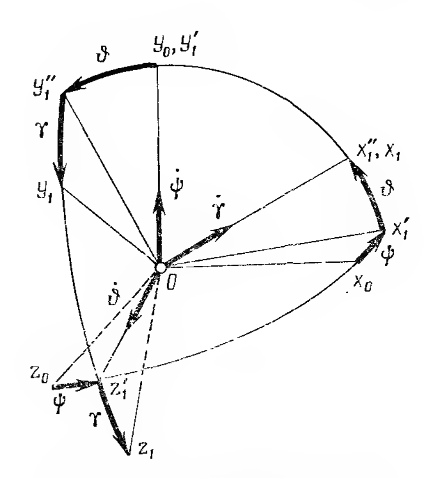


Рис. 4.1. Углы Эйлера для самолета

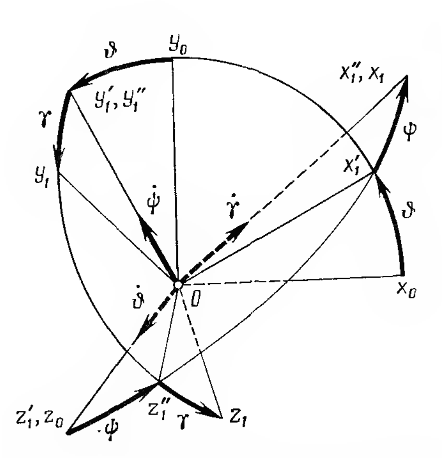


Рис. 4.2. Углы Эйлера для баллистической ракеты

ную ось x_1, и плоскостью симметрии x_1y_1 самолета. Угол рыскания положителен при повороте самолета влево, угол тангажа положителен, когда нос самолета поднят кверху, угол крена положителен, когда опущено правое крыло.

Для баллистической ракеты принимают последовательность ϑ, ψ, γ вместо ψ, ϑ, γ (рис. 4.2). Это вызвано тем, что при обычной последовательности ψ, ϑ, γ не было бы возможности рассматривать угол рыскания ψ как угол между продольной осью x_1 ракеты и плоскостью стрельбы x_0y_0. Угол тангажа ϑ определяют как угол между проекцией x_1' продольной оси ракеты на плоскость стрельбы и осью x_0 стартовой системы. Угол крена γ — это угол между поперечной осью z_1 ракеты и ее проекцией z_1'' на плоскость z_0x_1, перпендикулярную плоскости стрельбы.

Возвращаясь к последовательности поворотов при введении углов Эйлера, можно сказать, что первый поворот производится обычно вокруг той оси, относительно которой объект в процессе работы может поворачиваться на большие углы (курсовая ось y_0 в случае самолета; ось z_0, перпендикулярная плоскости стрельбы, в которой происходит программный разворот ракеты и др.).

Обозначим углы Эйлера при последовательности поворотов для самолета как ψ, ϑ, γ, а при последовательности для баллистической ракеты — как ϑ^*, ψ^*, γ^*. Если предположить равенство соответственных углов ($\psi = \psi^*$, $\vartheta = \vartheta^*$, $\gamma = \gamma^*$), то положения связанной системы $x_1y_1z_1$ относительно неподвижной $x_0y_0z_0$ будут разные, в чем и проявляется упомянутая некоммутативность углов Эйлера. Сказанное проил-

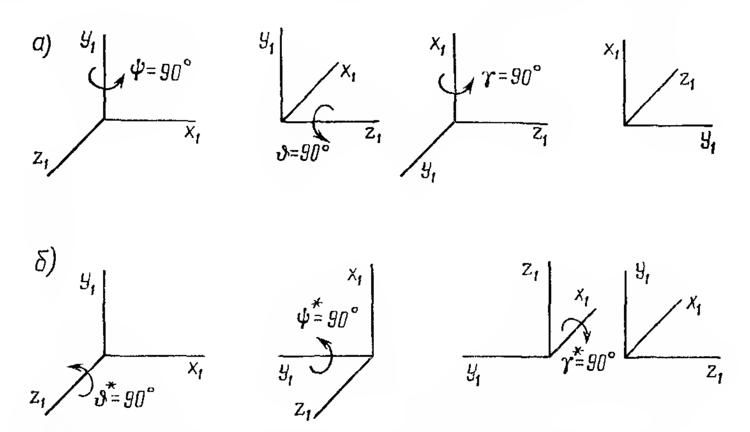


Рис. 4.3. Положения связанной системы при различной последовательности поворотов на одинаковые углы

люстрировано на рис. 4.3, где принято $\psi = \psi^* = 90°$, $\vartheta = \vartheta^* = 90°$, $\gamma = \gamma^* = 90°$. Из этого рисунка видно, что при одинаковости исходных положений окончательные положения связанной системы $x_1y_1z_1$ для последовательностей *а* и *б* не совпадают.

§ 4.3. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ ЭЙЛЕРА ТРЕХОСНОЙ ГИРОПЛАТФОРМОЙ

Без каких-либо методических ошибок углы Эйлера самолета могут быть измерены с помощью трехосной гиростабилизированной платформы, корректируемой в горизонте маятниками, а по странам света — от компаса. Если гироплатформа функционирует идеально, то связанные с нею оси воспроизводят на борту самолета определенную в § 4.1 земную систему координат $x_0y_0z_0$.

Возможны шесть вариантов расположения осей карданова подвеса гироплатформы относительно осей объекта. Однако лишь в одном из этих вариантов методические ошибки измерения углов Эйлера отсутствуют (другие пять вариантов характеризуются наличием так называемых карданных ошибок, см. § 4.5). Для самолета этот вариант расположения осей подвеса показан на рис. 4.4. Ось вращения платформы относительно внутреннего кольца должна совпадать с той осью неподвижной системы координат, вокруг которой производится первый поворот (для самолета — ось y_0, для баллистической ракеты — ось z_0). Ось вращения внутреннего кольца относительно наружного должна

совпадать с «линией узлов», поворотом вокруг которой вводится второй угол Эйлера. Ось вращения наружного кольца всегда располагается вдоль продольной оси объекта.

При таком расположении осей съем сигналов производится следующим образом. Угол рыскания ψ снимается с потенциометра $П_\psi$, связанного с ветрикальной осью y_0 вращения платформы относительно внутреннего кольца (со средней точки обмотки и движка этого потенциометра). Угол тангажа ϑ — с потенциометра $П_\vartheta$ на горизонтальной

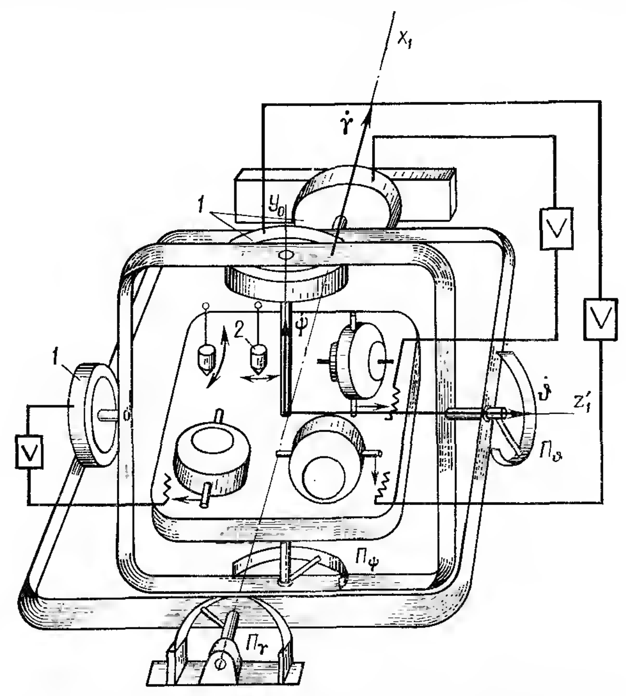


Рис. 4.4. Трехосная гироплатформа с маятниковой коррекцией относительно вертикали, измеряющая углы Эйлера самолета:

1 — моментные датчики; *2* — маятниковые устройства; $П_\vartheta$ — датчик угла тангажа; $П_\psi$ — датчик угла рыскания; $П_\gamma$ — датчик угла крена

оси z_1' вращения внутреннего кольца относительно наружного. Угол крена γ — с потенциометра $П_\gamma$ на оси x_1 вращения наружного кольца относительно корпуса самолета. Действительно, в движении рыскания вместе с самолетом участвуют наружное и внутреннее кольца карданова подвеса платформы. Платформа сохраняет свое угловое положение в пространстве неизменным. Поэтому обмотка потенциометра $П_\psi$, жестко связанная с внутренним кольцом, повернется на угол ψ относительно движка, связанного с вертикальной осью платформы.

При наклоне продольной оси самолета к горизонту (тангаж) вместе с самолетом наклоняется наружное кольцо подвеса, в то время как внутреннее кольцо не участвует в этом движении (вследствие связи

через ось y_0 с платформой плоскость внутреннего кольца всегда вертикальна). Обмотка потенциометра $П_\vartheta$, связанная с наружным кольцом, повернется на угол ϑ относительно движка, связанного с осью внутреннего кольца.

Наружная рама благодаря связи через оси z'_1 и y_0 с неподвижной платформой не участвует в движении крена самолета. Поэтому с потенциометра $П_\gamma$ снимается напряжение, пропорциональное углу крена γ.

Измерение углов Эйлера баллистической ракеты можно производить некорректируемой трехосной гиростабилизированной платформой

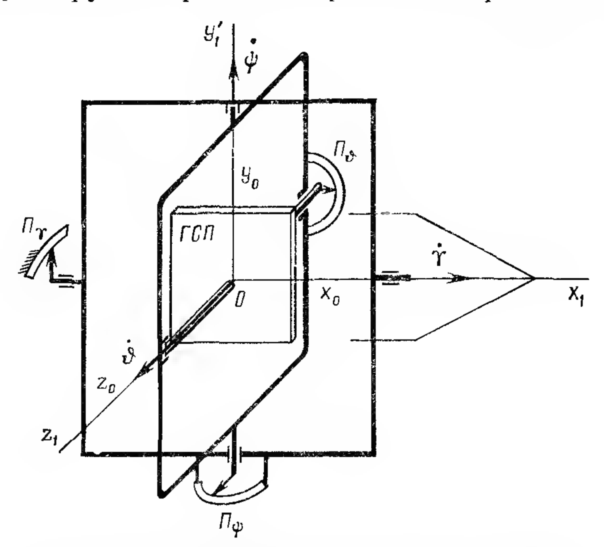


Рис. 4.5. Трехосная некорректируемая гироплатформа, измеряющая углы Эйлера баллистической ракеты

(*ГСП*), оси подвеса которой во избежание карданных ошибок располагают относительно связанной с ракетой системы $x_1y_1z_1$ так, как показано на рис. 4.5. В отличие от ранее рассмотренного случая для самолета, в сигналах, снимаемых с потенциометров $П_\vartheta$, $П_\psi$, $П_\gamma$ (см. рис. 4.5), будут содержаться методические ошибки. Дело в том, что некорректируемая гироплатформа в любой момент времени воспроизводит на борту ракеты направления осей стартовой системы $x_0y_0z_0$, существовавшие в момент старта ракеты. За время, истекшее с момента старта, стартовая система $x_0y_0z_0$, вращаясь вместе с Землей, повернется относительно неподвижной гироплатформы. Но этот поворот не отразится на показаниях потенциометров $П_\vartheta$, $П_\psi$, $П_\gamma$, хотя и изменяет углы Эйлера ракеты (углы Эйлера характеризуют положение ракеты относительно стартовой системы $x_0y_0z_0$, вращающейся вместе с Землей). Следовательно, вращение Земли вызывает ошибку в измерении гироплатформой углов Эйлера. Из-за малости интервала, на котором баллистическая ракета управляется (несколько десятков секунд), эта ошибка, однако, не достигает больших значений.

§ 4.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Пусть $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ — орты прямоугольной системы $x_1y_1z_1$, а $\bar{i}_0$, $\bar{j}_0$, $\bar{k}_0$ — орты системы $x_0y_0z_0$. Орты $\bar{i}_0$, $\bar{j}_0$, $\bar{k}_0$ можно представить в проекциях на оси системы $x_1y_1z_1$. Имеем:

$$\bar{i}_0 = l_{11}\bar{i}_1 + l_{12}\bar{j}_1 + l_{13}\bar{k}_1; \tag{4.1а}$$

$$\bar{j}_0 = l_{21}\bar{i}_1 + l_{22}\bar{j}_1 + l_{23}\bar{k}_1; \tag{4.1б}$$

$$\bar{k}_0 = l_{31}\bar{i}_1 + l_{32}\bar{j}_1 + l_{33}\bar{k}_1. \tag{4.1в}$$

Так как орты — единичные векторы, т. е. $|\bar{i}_0| = |\bar{j}_0| = |\bar{k}_0| = 1$, фигурирующие здесь коэффициенты $l_{\rho\gamma}$ представляют направляющие косинусы осей системы $x_0y_0z_0$ в системе $x_1y_1z_1$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} l_{11} &= \cos(x_0\hat{,} x_1), & l_{12} &= \cos(x_0\hat{,} y_1), & l_{13} &= \cos(x_0\hat{,} z_1);\\ l_{21} &= \cos(y_0\hat{,} x_1), & l_{22} &= \cos(y_0\hat{,} y_1), & l_{23} &= \cos(y_0\hat{,} z_1);\\ l_{31} &= \cos(z_0\hat{,} x_1), & l_{32} &= \cos(z_0\hat{,} y_1), & l_{33} &= \cos(z_0\hat{,} z_1). \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Если x_1, y_1, z_1 — проекции некоторого вектора $\bar{r}$ на оси системы $x_1y_1z_1$, т. е. $\bar{r} = \bar{i}_1x_1 + \bar{j}_1y_1 + \bar{k}_1z_1$, то, проектируя при использовании направляющих косинусов (4.2) составляющие $\bar{i}_1x_1$, $\bar{j}_1y_1$, $\bar{k}_1z_1$ на оси системы $x_0y_0z_0$, найдем проекции x_0, y_0, z_0 вектора $\bar{r}$ на оси этой системы:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= l_{11}x_1 + l_{12}y_1 + l_{13}z_1;\\ y_0 &= l_{21}x_1 + l_{22}y_1 + l_{23}z_1;\\ z_0 &= l_{31}x_1 + l_{32}y_1 + l_{33}z_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Этот же результат можно получить при помощи матрицы перехода от системы $x_1y_1z_1$ к системе $x_0y_0z_0$.

Основные правила матричного исчисления [4]. *Матрицей называют прямоугольную таблицу каких-либо величин.* Справа и слева этой таблицы обычно ставят или двойную черту, или (что в настоящее время применяют чаще) прямые скобки. Например, таблица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n}\\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

является прямоугольной матрицей типа $m \times n$ (m — число строк, а n — число столбцов матрицы).

Матрицу типа $n \times 1$ называют **матрицей-столбцом** или n-**вектором**. Например,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

суть n-мерный вектор ($b_1, \ldots, b_n$ — составляющие этого вектора по осям n-мерной системы координат).

Для сокращения записи матрицы часто обозначают одной буквой. Например, матрицы (4.4), (4.5) можно обозначить как **A** и **B**. Величины $a_{11}, a_{12}, \ldots, (b_1, \ldots, b_n)$ называют элементами матрицы.

Матрицы можно перемножить, если число столбцов матрицы, являющейся первым сомножителем, равно числу строк матрицы, выполняющей роль второго сомножителя*. Произведение матриц также представляет собой матрицу, число строк которой равно числу строк левой, а число столбцов — числу столбцов правой матрицы, образующих произведение. Если, например, перемножают матрицы типа $(m \times n)$ и $(n \times r)$, то матрица, представляющая произведение, будет типа $(m \times r)$. Элемент матрицы-произведения, находящийся в k-й строке и l-м столбце, получают перемножением элементов k-й строки левой матрицы сомножителя на соответственные элементы l-го столбца правой матрицы сомножителя: первый элемент строки умножают на первый элемент столбца, второй элемент строки — на второй элемент столбца и т. д.; сумма полученных таким образом произведений равна искомому элементу матрицы-произведения. Схематически процесс перемножения выглядит следующим образом:

$$\underset{(m \times n)}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \times \underset{(n \times r)}{\begin{bmatrix} \ldots c_{1l} \ldots \\ \ldots c_{2l} \ldots \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \\ \ldots c_{nl} \ldots \end{bmatrix}} = \underset{(m \times r)}{\begin{bmatrix} \cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \\ \ldots d_{kl} \ldots \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \end{bmatrix}},$$

где $\quad d_{kl} = a_{k1} c_{1l} + a_{k2} c_{2l} + \ldots + a_{kn} c_{nl}$.

Рассмотрим квадратную матрицу, т. е. матрицу

$$\mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

* Если записать рядом тип матриц-сомножителей, например $(m \times n)(n \times r)$, то матрицы перемножаемы только при равенстве серединных членов этой записи. В данном случае серединные члены одинаковы, т. е. $n = n$, так что матрицы перемножаемы.

элементами которой являются направляющие косинусы (4.2), и матрицу-столбец, строками которой служат соответственно x_1, y_1, z_1. Вычисляя произведение этих матриц, находим:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}x_1 + l_{12}y_1 + l_{13}z_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}y_1 + l_{23}z_1 \\ l_{31}x_1 + l_{32}y_1 + l_{33}z_1 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание выражения (4.3), видим, что в правой части получилась матрица-столбец с элементами x_0, y_0, z_0. Таким образом

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathrm{A}_{10} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Две матрицы считают равными, если они одного и того же типа, причем элементы одной матрицы равны соответственным элементам другой матрицы. Переходя от матричного равенства (4.7) к поэлементным равенствам, получим систему скалярных уравнений (4.3).

Матрицу A_{10} будем называть матрицей перехода от системы $x_1y_1z_1$ (первый нижний индекс у А) к системе $x_0y_0z_0$ (второй нижний индекс у А), или матрицей направляющих косинусов. Элементами строк этой матрицы служат проекции ортов системы $x_1y_1z_1$ соответственно на ось x_0 (первая строка), на ось y_0 (вторая строка) и на ось z_0 (третья строка).

Свойства матрицы перехода. Известно, что квадрат длины некоторого вектора равен сумме квадратов его проекций на оси прямоугольной системы координат. Учитывая (4.1), можно написать:

$$|\bar{i}_0|^2 = l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1; \tag{4.8а}$$

$$|\bar{j}_0|^2 = l_{21}^2 + l_{22}^2 + l_{23}^2 = 1; \tag{4.8б}$$

$$|\bar{k}_0|^2 = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 1. \tag{4.8в}$$

Принимая во внимание взаимную перпендикулярность ортов и их разложения (4.1), запишем следующие выражения скалярных произведений:

$$\left.\begin{aligned} (\bar{i}_0\bar{j}_0) &= l_{11}l_{21} + l_{12}l_{22} + l_{13}l_{23} = 0; \\ (\bar{j}_0\bar{k}_0) &= l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} + l_{23}l_{33} = 0; \\ (\bar{k}_0\bar{i}_0) &= l_{31}l_{11} + l_{32}l_{12} + l_{33}l_{13} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.8г}$$

Таким образом, сумма квадратов элементов каждой строки матрицы направляющих косинусов (4.6) равна единице, а сумма произведений элементов разных строк равна нулю. То же самое справедливо и в отношении столбцов.

Каждый из ортов можно представить как векторное произведение двух других: $\bar{i}_0 = [\bar{j}_0\bar{k}_0]$, $\bar{j}_0 = [\bar{k}_0\bar{i}_0]$, $\bar{k}_0 = [\bar{i}_0\bar{j}_0]$.

Раскрывая векторные произведения, например

$$\bar{i}_0=[\bar{j}_0\bar{k}_0]=\begin{vmatrix}\bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{vmatrix}=\bar{i}_1(l_{22}l_{33}-l_{32}t_{23})+\bar{j}_1(l_{31}l_{23}-l_{21}l_{33})+$$

$$+\bar{k}_1(l_{21}l_{32}-l_{31}l_{22}),$$

и приравнивая полученные компоненты соответственным компонентам в разложениях (4.1), получим:

$$l_{11}=l_{22}l_{33}-l_{32}l_{23},\quad l_{12}=l_{31}l_{23}-l_{21}l_{33},\quad l_{13}=l_{21}l_{32}-l_{31}l_{22}; \qquad (4.9а)$$

$$l_{21}=l_{32}l_{13}-l_{12}l_{33},\quad l_{22}=l_{11}l_{33}-l_{31}l_{13},\quad l_{23}=l_{31}l_{12}-l_{11}l_{32}; \qquad (4.9б)$$

$$l_{31}=l_{12}l_{23}-l_{22}l_{13},\quad l_{32}=l_{21}l_{13}-l_{11}l_{23},\quad l_{33}=l_{11}l_{22}-l_{21}l_{12}. \qquad (4.9в)$$

С учетом (4.9а) можно равенство (4.8а) записать в виде

$$l_{11}(l_{22}l_{33}-l_{32}l_{23})+l_{12}(l_{31}l_{23}-l_{21}l_{33})+l_{13}(l_{21}l_{32}-l_{31}l_{22})=1$$

или, если левая часть равна развернутому определителю матрицы направляющих косинусов, — в виде

$$\begin{vmatrix}l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, определитель матрицы перехода

$$\det \mathbf{A}_{10}=1. \qquad (4.10)$$

Сделаем теперь обратное преобразование координат, т. е. по проекциям x_0, y_0, z_0 некоторого вектора найдем его проекции x_1, y_1, z_1. Уравнение, выражающее это преобразование, можно получить из уравнения (4.7), умножив слева обе его части на матрицу $\mathbf{A}_{10}^{-1}$, являющуюся обратной по отношению к $\mathbf{A}_{10}$.

Обратную матрицу образуют заменой каждого элемента исходной квадратной матрицы его алгебраическим дополнением, транспонированием получившейся матрицы и делением каждого элемента на определитель исходной матрицы. Согласно (4.10) определитель исходной матрицы $\mathbf{A}_{10}$ равен единице, а, как это видно из (4.9), алгебраическое дополнение каждого ее элемента равно этому элементу. Следовательно, в данном случае обратная матрица получается транспонированием исходной, т. е. превращением столбцов в строки путем поворота каждого столбца вокруг его элемента, входящего в главную диагональ. Имеем

$$\mathbf{A}_{10}^{-1}=\begin{bmatrix}l_{11} & l_{21} & l_{31}\\ l_{12} & l_{22} & l_{32}\\ l_{13} & l_{23} & l_{33}\end{bmatrix}. \qquad (4.11)$$

При использовании соотношений (4.8), (4.10) легко показать, что $\det \mathbf{A}_{10}^{-1}=1$.

Умножая, как указывалось, слева уравнение (4.7) на матрицу (4.11) и учитывая, что $A_{10}^{-1}A_{10}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица (произведение $\mathbf{I}$ и какой-либо матрицы равно этой матрице, так что сомножитель $\mathbf{I}$ можно опустить), получим искомое обратное преобразование

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}=A_{10}^{-1}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}. \qquad (4.12а)$$

Таким образом, матрица перехода A_{01} от системы $x_0y_0z_0$ к системе $x_1y_1z_1$ имеет вид

$$A_{01}=A_{10}^{-1}=\begin{bmatrix}l_{11}&l_{21}&l_{31}\\l_{12}&l_{22}&l_{32}\\l_{13}&l_{23}&l_{33}\end{bmatrix}. \qquad (4.12б)$$

Матрица перехода от неподвижной системы координат к связанной. Использованные выше прямоугольные системы $x_0y_0z_0$ и $x_1y_1z_1$ можно воспринимать как некоторые две произвольные системы координат. Примем, например, за первую систему неподвижную систему координат $x_0y_0z_0$, а за вторую — связанную с самолетом систему $x_1'y_1'z_1'$ после первого поворота на угол ψ (см. рис. 4.1). Матрицу перехода A_ψ от системы $x_0y_0z_0$ к системе $x_1'y_1'z_1'$ можно найти, проектируя вектор $\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}$ на оси системы $x_1'y_1'z_1'$. При проектировании целесообразно составляющие $\bar{i}_0x_0$, $\bar{j}_0y_0$, $\bar{k}z_0$ считать направленными в положительном направлении осей x_0, y_0, z_0, а угол ψ — положительным. Искомые проекции x_1', y_1', z_1' равны сумме проекций векторов $\bar{i}_0x_0$, $\bar{j}_0y_0$; $\bar{k}_0z_0$ соответственно на оси x_1', y_1', z_1' и выражаются элементами матрицы-столбца, получающейся в правой части матричного уравнения

$$\begin{bmatrix}x_1'\\y_1'\\z_1'\end{bmatrix}=A_\psi\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}, \qquad (4.13)$$

где, как нетрудно видеть,

$$A_\psi=\begin{bmatrix}\cos\psi&0&-\sin\psi\\0&1&0\\\sin\psi&0&\cos\psi\end{bmatrix}. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Точно так же с помощью рис. 4.1 можно получить матрицу перехода $\mathbf{A}_\vartheta$ от системы $x_1'y_1'z_1'$ к системе $x_1''y_1''z_1''$, образующейся в результате второго поворота на угол ϑ:

$$\mathbf{A}_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

И, наконец, матрица перехода $\mathbf{A}_\gamma$ от системы $x_1''y_1''z_1''$ к системе $x_1y_1z_1$, также получаемая из рис. 4.1, имеет вид

$$\mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Как указывалось в § 4.2, от неподвижной системы $x_0y_0z_0$ к связанной с самолетом системе $x_1y_1z_1$ можно перейти, производя последовательные повороты на углы ψ, ϑ, γ. При этом проекции некоторого вектора преобразуются в следующей последовательности:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Первое преобразование выражается уравнением (4.13), а второе — уравнением

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\vartheta \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Подставляя в правую часть (4.18) выражение (4.13), получим

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\vartheta \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Последнее из преобразований (4.17) определяется уравнением

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\gamma \begin{bmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

После подстановки в правую часть (4.20) выражения (4.19) находим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\vartheta \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрицу перехода от неподвижной системы $x_0y_0z_0$ к связанной $x_1y_1z_1$ (матрицу направляющих косинусов) можно вычислить по формуле

$$\mathbf{A}_{01} = \mathbf{A}_{\gamma} \mathbf{A}_{\vartheta} \mathbf{A}_{\psi}, \tag{4.21}$$

где матрицы $\mathbf{A}_{\psi}$, $\mathbf{A}_{\vartheta}$, $\mathbf{A}_{\gamma}$ определяются выражениями (4.14) $\div$ (4.16) (порядок следования сомножителей в правой части (4.21) изменять нельзя).

§ 4.5. КАРДАННАЯ ОШИБКА КУРСОВОГО ГИРОСКОПА

Углы Эйлера самолета измеряют обычно гировертикалью *1* и курсовым гироскопом *2* (рис. 4.6). Курсовой гироскоп представляет собой свободный гироскоп с вертикальной осью вращения наружного кольца. В дальнейшем будем предполагать ось ротора курсового гироскопа все время совпадающей с осью x_0 земной системы координат, что можно обеспечить, например, поместив на кожухе специальный грузик, вызывающий прецессию гироскопа вслед за вращающейся Землей.

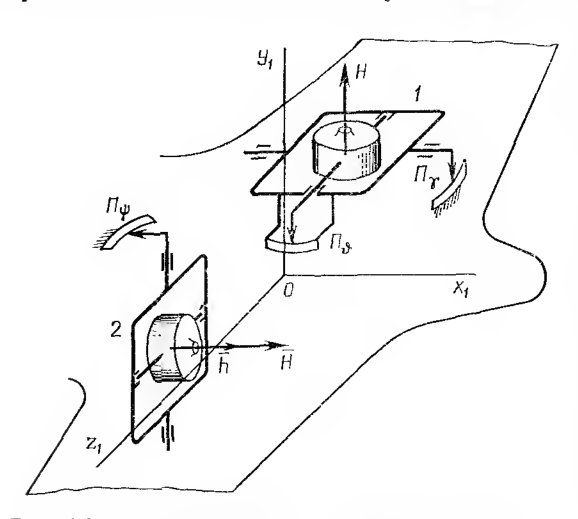


Рис. 4.6. Гировертикаль *1* и курсовой гироскоп *2*

При расположении осей карданова подвеса, показанном на рис. 4.6, гировертикаль измеряет угол тангажа ϑ и угол крена γ самолета без каких-либо методических ошибок. Этого нельзя сказать о курсовом гироскопе, предназначенном для измерения угла рыскания ψ. Когда ось вращения наружного кольца курсового гироскопа совпадает с вертикальной осью y_0 земной системы, что имеет место при $\vartheta = 0$, $\gamma = 0$, угол α отклонения движка потенциометра $П_\psi$ от средней точки обмотки равен углу рыскания самолета ψ. При отклонении оси наружного кольца от оси y_0, возникающем при наклоне самолета относительно горизонтальной плоскости ($\vartheta \neq 0$, $\gamma \neq 0$), равенство углов α и ψ нарушается.

Поскольку об угле рыскания ψ судят по измеряемому углу α, в показаниях курсового гироскопа содержится ошибка $\alpha - \psi$, называемая *карданной*. Карданная ошибка имеет чисто геометрический характер и легко может быть вычислена при использовании рассмотренных в предыдущем параграфе матриц перехода.

Направим единичный вектор $\bar{h}$ по оси ротора курсового гироскопа. Ось ротора постоянно совпадает с осью x_0 земной системы, поэтому указанный вектор можно представить в земной системе $x_0y_0z_0$ матрицей-столбцом:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем представление этого вектора в связанной с самолетом системе $x_1y_1z_1$. Воспользовавшись матрицей перехода (4.21), имеем

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\vartheta \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

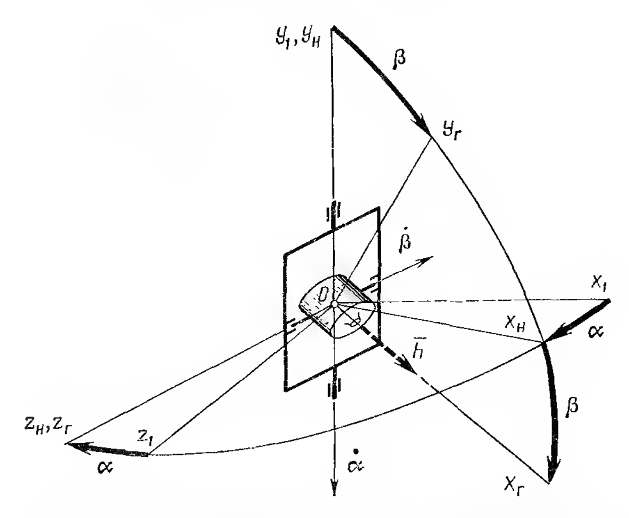


Рис. 4.7. Системы координат и углы, определяющие положение курсового гироскопа в связанной системе

или, перемножив матрицы (4.14), (4.15), (4.16) —

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta \\ -\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma \\ \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma \end{bmatrix}. \qquad (4.22)$$

С другой стороны, представление единичного вектора $\bar{h}$ в связанной с самолетом системе $x_1y_1z_1$ возможно через углы α, β, определяющие положение связанной с кожухом гироскопа системы $x_гy_гz_г$ относительно системы $x_1y_1z_1$ (рис. 4.7). Угол α есть угол поворота наружного кольца относительно корпуса самолета, β — угол поворота кожуха гироскопа (внутреннее кольцо) относительно наружного кольца. Как это было принято ранее (см. рис. 1.14, угол ψ_1), угол α положи-

телен, если, наблюдая с положительного конца оси y_1, видим наружное кольцо повернутым относительно корпуса самолета по часовой стрелке. Такой же положительный отсчет (по часовой стрелке при наблюдении с положительного конца оси $z_н$) принимаем и для угла β.

Из рис. 4.7 легко находим матрицу перехода A_β^{-1} от системы $x_г y_г z_г$ к системе $x_н y_н z_н$, связанной с наружным кольцом, и матрицу перехода A_α^{-1} от системы $x_н y_н z_н$ к системе $x_1 y_1 z_1$:

$$A_\beta^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad A_\alpha^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}. \qquad (4.23)$$

Эти матрицы были получены обращением (в данном случае — транспонированием) предварительно составленных матриц перехода A_α, A_β от системы $x_1 y_1 z_1$ к системе $x_н y_н z_н$ и от нее к системе $x_г y_г z_г$.

Единичный вектор $\bar{h}$ представляется в системе $x_г y_г z_г$ матрицей-столбцом

$$\begin{bmatrix}x_г\\ y_г\\ z_г\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Представление этого вектора в связанной с самолетом системе $x_1 y_1 z_1$ определяется выражением

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=A_\alpha^{-1}A_\beta^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

которое, принимая во внимание (4.23), можно привести к виду

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta\\ -\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\end{bmatrix}. \qquad (4.24)$$

Получив представления (4.22) и (4.24) единичного вектора $\bar{h}$ в системе $x_1 y_1 z_1$ через углы ψ, ϑ, γ и α, β, нетрудно найти связь между этими углами. Приравнивая соответственные элементы матриц-столбцов, стоящих в правых частях уравнений (4.22) и (4.24), находим:

$$\cos\alpha\cos\beta=\cos\psi\cos\vartheta;$$

$$-\sin\beta=-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma+\sin\psi\sin\gamma;$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma+\sin\psi\cos\gamma,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha=(\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma+\sin\psi\cos\gamma)/(\cos\psi\cos\vartheta). \qquad (4.25)$$

Формула (4.25) устанавливает связь между снимаемым с курсового гироскопа углом α и углами Эйлера самолета. Как видно из этой формулы, равенство $\alpha=\psi$ имеет место лишь при $\vartheta=0$, $\gamma=0$.

§ 4.6. КАРДАННЫЕ ОШИБКИ ГИРОГОРИЗОНТА И ГИРОВЕРТИКАНТА

В качестве измерителей углов Эйлера баллистической ракеты ФАУ-2 использовались два свободных гироскопа, один из которых, гировертикант *I*, измерял углы рыскания ψ и крена γ, а другой, гирогоризонт *II*, предназначался для измерения отклонения $\Delta\vartheta$ угла тангажа от программного значения $\vartheta_{пр}$ [21]. Расположение этих гироскопов на борту ракеты показано на рис. 4.8. Гирогоризонт имеет базу, поворачиваемую относительно корпуса ракеты часовым механизмом по заданной программе $\vartheta_{пр}$. За счет этого обеспечивается программный разворот ракеты в плоскости стрельбы.

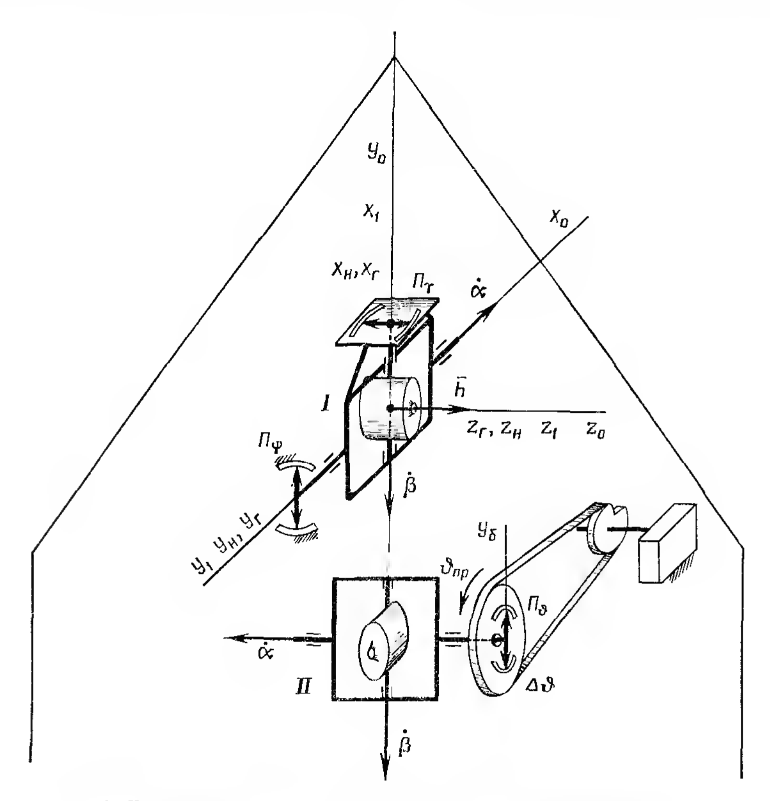


Рис. 4.8. Гировертикант *I* и гирогоризонт *II* на борту ракеты в момент старта

Рассмотрим сначала показания гировертиканта. Сигнал, снимаемый с потенциометрического датчика $П_\psi$ этого прибора, пропорционален углу рыскания ψ только при отсутствии крена γ ракеты. В свою очередь сигнал с потенциометрического датчика $П_\gamma$ пропорционален углу крена γ только при $\psi = 0$. Другими словами, в показаниях

гировертиканта содержатся ошибки, обусловленные кинематикой карданного подвеса (карданные ошибки).

Для вычисления карданных ошибок воспользуемся способом, примененным в предыдущем параграфе. А именно, единичный вектор $\bar{h}$, направленный по оси вращения ротора и постоянно совпадающий с осью z_0 стартовой системы*, спроектируем на оси связанной системы $x_1y_1z_1$ сначала при использовании углов Эйлера ϑ, ψ, γ, а затем — углов β, α, определяющих положение оси ротора в связанной системе.

Из рис. 4.2 легко найти матрицы перехода $\mathbf{A}_\vartheta$, $\mathbf{A}_\psi$, $\mathbf{A}_\gamma$ соответственно от стартовой системы $x_0y_0z_0$ к системе $x_1'y_1'z_1'$, от системы $x_1'y_1'z_1'$ к системе $x_1''y_1''z_1''$, и, наконец, от системы $x_1''y_1''z_1''$ к связанной системе $x_1y_1z_1$. Эти матрицы не отличаются от матриц $\mathbf{A}_\vartheta$, $\mathbf{A}_\psi$, $\mathbf{A}_\gamma$, определяемых выражениями (4.15), (4.14) и (4.16).

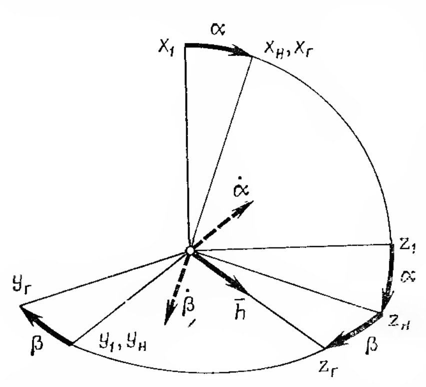


Рис. 4.9. Системы координат, связанные с ракетой и кольцами карданова подвеса гировертиканта

Учитывая, что единичный вектор $\bar{h}$ представляется в стартовой системе $x_0y_0z_0$ матрицей-столбцом

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

получаем следующее представление этого вектора в связанной с ракетой системе $x_1y_1z_1$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Если с кожухом гироскопа связать систему $x_гy_гz_г$, а с наружным кольцом — систему $x_нy_нz_н$ (см. рис. 4.8 и 4.9), то, обозначив через α угол поворота наружного кольца относительно корпуса ракеты, а через β — угол поворота кожуха гироскопа относительно наружного кольца**, получим следующие матрицы перехода $\mathbf{A}_\beta^{-1}$, $\mathbf{A}_\alpha^{-1}$ от системы $x_гy_гz_г$ к системе $x_нy_нz_н$ и от системы $x_нy_нz_н$ к связанной системе $x_1y_1z_1$:

$$\mathbf{A}_\beta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Эти матрицы были найдены обращением предварительно составленных матриц перехода $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{A}_\beta$ от связанной системы $x_1y_1z_1$ к системе $x_нy_нz_н$ и от нее к системе $x_гy_гz_г$.

---

* С точностью до ошибки, вызываемой вращением Земли (см. § 4.3).

** Положительный отсчет углов α, β производится по часовой стрелке, если наблюдать с положительных концов осей y_1, $x_н$.

В системе гироскопа $x_г y_г z_г$ единичный вектор $\bar{h}$ представляется матрицей-столбцом

$$\begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используя матрицы перехода (4.27), получаем следующее представление этого вектора в связанной системе $x_1 y_1 z_1$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = A_\alpha^{-1} A_\beta^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (4.28)$$

Приравнивая после перемножения матриц соответственные элементы правых частей уравнений (4.26) и (4.28), получим:

$$-\sin\alpha\cos\beta = -\sin\psi;$$
$$\sin\beta = \cos\psi\sin\gamma;$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \cos\psi\cos\gamma.$$

Отсюда находим следующие выражения углов α, β, измеряемых потенциометрическими датчиками на осях наружного и внутреннего колец гировертиканта, через угол рыскания ψ и угол крена γ ракеты:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\psi/\cos\gamma; \qquad (4.29а)$$
$$\sin\beta = \sin\gamma\cos\psi. \qquad (4.29б)$$

Согласно этим формулам карданные ошибки имеют вид

$$\Delta\psi_{кард} = \alpha - \psi = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\psi/\cos\gamma] - \psi;$$
$$\Delta\gamma_{кард} = \beta - \gamma = \arcsin[\sin\gamma\cos\psi] - \gamma.$$

Карданная ошибка гирогоризонта может быть определена следующим образом. Полагая базу неподвижной относительно корпуса ракеты, можно при помощи анализа, аналогичного использованному выше, выразить угол $\alpha_г$ поворота движков относительно оси базы $y_б$ через углы Эйлера ракеты. Ось $y_б$, соединяющая средние точки обмоток потенциометра (см. рис. 4.8), считается при этом совпадающей с направлением оси y_1 связанной системы. Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_г = \frac{\sin\vartheta\cos\psi}{\cos\vartheta\cos\gamma + \sin\vartheta\sin\psi\sin\gamma}. \qquad (4.30)$$

В действительности база поворачивается относительно корпуса ракеты программным механизмом по определенному закону $\vartheta_{пр}(t)$, где $\vartheta_{пр}$ — угол между осью y_1 ракеты и осью $y_б$ базы. В момент старта $\vartheta = \pi/2$, $\psi = 0$, $\gamma = 0$ и согласно (4.30) $\alpha_г = \pi/2$. Но в этот момент и $\vartheta_{пр} = \pi/2$, так что рассогласование на потенциометре базы $\Delta\alpha_г = \alpha_г - \vartheta_{пр} = 0$.

После старта рассогласование на потенциометре базы

$$\Delta\alpha_{\Gamma} = \operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta\cos\psi}{\cos\vartheta\cos\gamma+\sin\vartheta\sin\psi\sin\gamma} - \vartheta_{\text{пр}}(t), \quad (4.31)$$

где $\vartheta_{\text{пр}}(t)$ — убывающая функция времени. Это рассогласование поступает в канал системы стабилизации ракеты по тангажу, работа которого обеспечивает $\Delta\alpha_{\Gamma} \approx 0$ и, следовательно, $\vartheta(t) \approx \vartheta_{\text{пр}}(t)$. Как видно из выражения (4.31), равенство $\vartheta(t) \approx \vartheta_{\text{пр}}(t)$ выдерживается тем точнее (при $\Delta\alpha_{\Gamma} = 0$), чем меньше γ. Это обстоятельство является одной из причин необходимости стабилизации ракеты по углу крена, т. е. поддержания при помощи автомата стабилизации равенства $\gamma \approx 0$.

4.7. ДРУГИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

Помимо непосредственного измерения углов Эйлера существуют другие способы задания и измерения углового положения связанной системы относительно неподвижной (направляющие косинусы, параметры Родрига—Гамильтона, параметры Кейли — Клейна и др.). В настоящем параграфе рассматривается способ определения направляющих косинусов осей связанной системы в инерциальной системе координат без непосредственного измерения углов Эйлера.

Определение направляющих косинусов по угловой скорости. Полную производную $d\bar{a}/dt$ некоторого вектора $\bar{a}$, равную полной линейной скорости конца этого вектора, можно представить в виде суммы двух составляющих. Одна составляющая равна скорости изменения вектора $\bar{a}$ относительно подвижной системы координат и характеризуется скоростью изменения проекций вектора $\bar{a}$ на оси подвижной системы (локальная производная). Другая составляющая равна линейной скорости конца вектора $\bar{a}$, проистекающей от вращения вектора $\bar{a}$ вместе с подвижной системой (переносная скорость). Если $\bar{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы относительно инерциальной (абсолютная угловая скорость), то вторая составляющая выражается векторным произведением $[\bar{\omega}\bar{a}]$. Таким образом,

$$d\bar{a}/dt = \tilde{d}\bar{a}/dt + [\bar{\omega}\bar{a}], \quad (4.32)$$

где $\tilde{d}\bar{a}/dt$ — локальная производная.

Примем в качестве подвижной системы связанную с объектом систему координат $x_1y_1z_1$, а в качестве вектора $\bar{a}$ — орт $\bar{i}_0$ инерциальной системы. Согласно (4.32), можно записать

$$d\bar{i}_0/dt = \tilde{d}\bar{i}_0/dt + [\bar{\omega}\,\bar{i}_0]. \quad (4.33)$$

Обозначая через p, q, r проекции абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$ объекта на оси x_1, y_1, z_1 связанной с ним системы и принимая во внимание разложение (4.1 а) орта $\bar{i}_0$ по осям связанной системы $x_1y_1z_1$, по-

лучаем следующее разложение правой части (4.33) по осям этой системы:

$$\frac{d\bar{i}_0}{dt} = (\dot{l}_{11}\bar{i}_1 + \dot{l}_{12}\bar{j}_1 + \dot{l}_{13}\bar{k}_1) + \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ p & q & r \\ l_{11} & l_{12} & l_{13} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}_1(\dot{l}_{11} + ql_{13} - rl_{12}) + \bar{j}_1(\dot{l}_{12} + rl_{11} - pl_{13}) + \bar{k}_1(\dot{l}_{13} + pl_{12} - ql_{11}). \quad (4.34)$$

Однако вектор $\bar{i}_0$ не меняется ни по длине, ни по направлению (единичный вектор по оси x_0 инерциальной системы). Поэтому его полная производная, стоящая в левой части (4.34) (вектор $d\bar{i}_0/dt$), равна нулю, что указывает на равенство нулю и проекции вектора $d\bar{i}_0/dt$ на оси связанной системы. Учитывая это, из разложения (4.34) получаем следующую замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно направляющих косинусов l_{11}, l_{12}, l_{13}:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{l}_{11} + ql_{13} - rl_{12} = 0; \\ &\dot{l}_{12} + rl_{11} - pl_{13} = 0; \\ &\dot{l}_{13} + pl_{12} - ql_{11} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.35)$$

Принимая в качестве вектора $\bar{a}$ орты $\bar{j}_0$, $\bar{k}_0$ инерциальной системы и производя аналогичные выкладки, получим еще две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{l}_{21} + ql_{23} - rl_{22} = 0; \\ &\dot{l}_{22} + rl_{21} - pl_{23} = 0; \\ &\dot{l}_{23} + pl_{22} - ql_{21} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.36)$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{l}_{31} + ql_{33} - rl_{32} = 0; \\ &\dot{l}_{32} + rl_{31} - pl_{35} = 0; \\ &\dot{l}_{33} + pl_{32} - ql_{31} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.37)$$

Дифференциальные уравнения (4.35) ÷ (4.37) связывают угловые скорости p, q, r связанного трехгранника относительно его осей $x_1y_1z_1$ с направляющими косинусами l_{ij} осей x_1, y_1, z_1 в неподвижной системе $x_0y_0z_0$. Эти уравнения называют *уравнениями Пуассона.*

Уравнения Пуассона можно записать в виде одного матричного уравнения*

$$\dot{\mathrm{A}}_{10} = \mathrm{A}_{10}\,\boldsymbol{\omega}, \quad (4.38)$$

* Дифференцирование матрицы сводится к дифференцированию каждого ее элемента.

где $\mathbf{A}_{10}$ — матрица направляющих косинусов (4.6); $\boldsymbol{\omega}$ — матрица, определяемая выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.39}$$

Измеряя угловые скорости p, q, r объекта и производя интегрирование уравнений (4.35) $\div$ (4.37) или матричного уравнения (4.38), можно определить направляющие косинусы l_{ij} осей связанной системы $x_1y_1z_1$ в инерциальной системе, т. е. решить задачу об угловом положении объекта в инерциальной системе координат. Измерение угловых скоростей p, q, r можно произвести или тремя ДУСами, или шестью линейными акселерометрами. Акселерометры (см. § 7.1) располагают, например, по разные стороны от центра тяжести объекта попарно на каждой оси объекта. Их оси чувствительности направлены в разные стороны вдоль соединяющей их оси объекта. Возникающие при вращении объекта центробежные силы измеряются акселерометрами и используются для вычисления угловых скоростей p, q, r. Лишь три из девяти определяемых таким образом направляющих косинусов l_{ij} являются независимыми, так как имеется шесть соотношений (4.8), которым должны удовлетворять направляющие косинусы.

Примером системы ориентации, основанной на интегрировании уравнений Пуассона (4.38), может служить бесплатформенная система инерциальной навигации, используемая на космическом корабле «Апполон».

Бесплатформенная система инерциальной навигации. Инерциальная система навигации предназначается для автоматического определения местоположения и скорости движущегося объекта. Кроме того, она дает информацию и об угловом положении корпуса объекта относительно системы отсчета.

Обычная инерциальная система содержит гиростабилизированную платформу с тремя установленными на ней акселерометрами, измеряющими линейные ускорения. Гироплатформа реализует на борту объекта направления осей инерциальной системы координат, т. е. не участвует в колебаниях объекта вокруг ЦТ. Поскольку она помещена в ЦТ объекта, снимаемые с акселерометров сигналы зависят только от ускорений ЦТ объекта. Интегрирование этих сигналов дает составляющие скорости объекта по осям инерциальной системы (оси чувствительности акселерометров направлены по трем взаимно перпендикулярным осям гироплатформы, воспроизводящим оси инерциальной системы координат). Интегрирование составляющих скорости дает координаты ЦТ объекта в инерциальной системе.

Другой тип инерциальных систем навигации не связан с использованием гиростабилизированной платформы. Функции гиростабилизированнной платформы выполняет цифровая вычислительная машина (ЦВМ), вычисляющая направляющие косинусы l_{ij} согласно алгоритму, вытекающему из формулы (4.38). Информация об угловых скоростях

объекта* поступает в ЦВМ от специальных гироприборов, устанавливаемых на объекте. Акселерометры также устанавливают непосредственно на корпусе объекта. Сигналы с акселерометров с помощью направляющих косинусов l_{ij} проектируются на оси инерциальной системы координат. На эти же оси проектируется с обратным знаком вектор силы тяжести. Двукратное интегрирование результирующих проекций дает координаты ЦТ объекта в инерциальной системе координат.

Все вычисления производятся ЦВМ, устанавливаемой на борту объекта. ЦВМ — машина дискретного действия. Вследствие малости периода дискретности T полагают, что за этот период вектор $\bar{\omega}$ угловой скорости связанной системы по отношению к этой системе не изменяется, т. е. считают, что проекции p, q, r в течение периода дискретности T постоянны. Тогда (4.38) становится линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Как и в случае скалярного однородного уравнения первого порядка, решение этого матричного уравнения

$$\mathbf{A}_{10}(t) = \mathbf{A}_{10}^{0}\, e^{\omega t}, \tag{4.40}$$

где $\mathbf{A}_{10}^{0}$ — значение матрицы направляющих косинусов в начале периода дискретности; $e^{\omega t}$ — матричный экспоненциал или матрицант системы (см. § 5.6).

Формула (4.40) определяет направляющие косинусы в любой момент периода дискретности. Однако ЦВМ использует только значения, соответствующие концу предшествующего периода дискретности, т. е. значения $\mathbf{A}_{10}^{0} e^{\omega T}$. Вводя для углов поворота объекта за период дискретности обозначения $\theta_1 = pT$, $\theta_2 = qT$, $\theta_3 = rT$, можно записать выражения направляющих косинусов для конца предшествующего периода дискретности в виде

$$\mathbf{A}_{10}(T) = \mathbf{A}_{10}^{0} e^{\Theta}, \tag{4.41}$$

где

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.42}$$

Экспоненциальная функция от матрицы трактуется как бесконечный степенной ряд, т. е.

$$e^{\Theta} = \mathbf{I} + \Theta + \Theta^2/2! + \Theta^3/3! + \dots . \tag{4.43}$$

Если в этот ряд подставить выражение (4.42) и выполнить перемножение (возведение в степень) матриц, то можно заметить, что ряды,

---

* В действительности гироскопы дают информацию о приращении углов поворота объекта (4.42).

через которые выражаются элементы результирующей матрицы, суммируются. Производя указанные выкладки, получим

$$\mathbf{e}^{\Theta}=\begin{bmatrix} 1-(\theta_2^2+\theta_3^2)C_\infty & \theta_1\theta_2 C_\infty-\theta_3 S_\infty & \theta_3\theta_1 C_\infty+\theta_2 S_\infty \\ \theta_1\theta_2 C_\infty+\theta_3 S_\infty & 1-(\theta_3^2+\theta_1^2)C_\infty & \theta_2\theta_3 C_\infty-\theta_1 S_\infty \\ \theta_3\theta_1 C_\infty-\theta_2 S_\infty & \theta_2\theta_3 C_\infty+\theta_1 S_\infty & 1-(\theta_1^2+\theta_2^2)C_\infty \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

где

$$C_\infty=(1-\cos\theta_0)/\theta_0^2, \quad (4.45)$$

$$S_\infty=\sin\theta_0/\theta_0, \quad (4.46)$$

$$\theta_0=\left(\sum_{i=1}^{3}\theta_i^2\right)^{1/2}. \quad (4.47)$$

Элементы матрицы (4.44) вычисляются ЦВМ, причем данные об углах θ_1, θ_2, θ_3 поступают в ЦВМ от специальных гироскопов, о которых будет сказано ниже. Но ЦВМ выполняет только арифметические операции, а в выражения элементов матрицы (4.44) входят трансцендентные функции $\sin\theta_0$, $\cos\theta_0$. Чтобы получить алгоритм, пригодный для использования в ЦВМ, прибегают к аппроксимации функций $\sin\theta_0$, $\cos\theta_0$ усеченными рядами Тейлора, что эквивалентно учету лишь нескольких первых членов ряда (4.43).

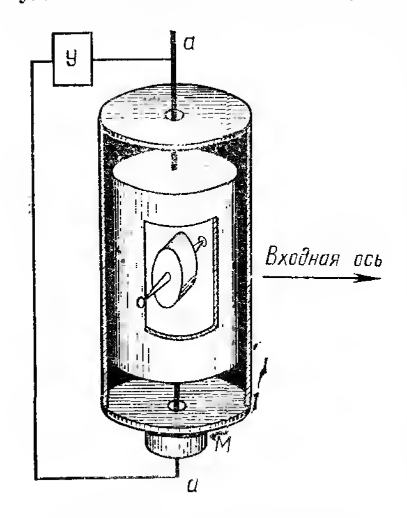


Рис. 4.10. Интегрирующий поплавковый гироскоп с импульсной обратной связью

Приращения θ_1, θ_2, θ_3 углов поворота объекта вокруг связанных с ним осей за период дискретности T определяются интегрирующими поплавковыми гироскопами, охваченными импульсной обратной связью (рис. 4.10). Интегрирующий поплавковый гироскоп состоит из герметичного кожуха с заключенным внутри гироскопом, имеющего возможность поворачиваться относительно внешнего герметичного кожуха вокруг оси a — a. Пространство между этими двумя кожухами заполнено вязкой жидкостью, плотность которой такова, что внутренний кожух находится во взвешенном состоянии.

Данный прибор служит для измерения угла поворота внешнего кожуха (т. е. объекта, на котором установлен прибор) относительно инерциальной системы координат. При вращении внешнего кожуха вокруг оси, перпендикулярной оси ротора и оси a — a (входная ось прибора), возникает гироскопический момент, прикладываемый со стороны гироскопа к внутреннему кожуху вокруг оси a — a.

Коэффициент вязкого трения поддерживающей жидкости велик, так что постоянная времени, равная отношению момента инерции

внутреннего кожуха (вместе с гироскопом) относительно оси $a - a$ к коэффициенту вязкого трения поддерживающей жидкости, очень мала. Поэтому гироскопический момент практически мгновенно создает скорость вращения внутреннего кожуха относительно внешнего, пропорциональную этому моменту, и, следовательно, угловой скорости внешнего кожуха относительно инерциальной системы координат. Таким образом, угол поворота внутреннего кожуха относительно внешнего, являющийся интегралом от указанной скорости, пропорционален углу поворота внешнего кожуха (объекта) относительно инерциальной системы координат.

За период дискретности T угол поворота внутреннего кожуха относительно внешнего составляет θ_i ($i = 1, 2, 3$). Этот угол измеряется электромагнитным датчиком и с помощью специальной электронной схемы формируется пропорциональный ему импульс, поступающий как на моментный датчик $M_д$ прибора, так и на входное устройство ЦВМ. Моментный датчик к началу следующего периода дискретности возвращает внутренний кожух в исходное положение.

Таким образом, схема прибора аналогична схеме ДУСа с «электрической пружиной», выполненной в виде импульсной цепи. Период дискретности T должен быть достаточен для полного затухания в течение этого периода собственных колебаний прибора.

4 Зак. 3 05

Глава V

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Летательные аппараты по своей аэродинамической схеме делятся на аппараты самолетной (монопланной) схемы и аппараты с крестообразным расположением несущих поверхностей. В зависимости от поперечной ориентировки несущих поверхностей эти последние делятся на аппараты плюсообразной (*а*) и иксообразной (*б*) схемы (рис. 5.1). Баллистические ракеты принадлежат к крестокрылым аппаратам плюсообразной схемы, характерная особенность которых в том, что одна из двух одинаковых пар плоскостей оперения удерживается в вертикальной плоскости (рис. 5.2). Это делается автоматом стабилизации ракеты по крену.

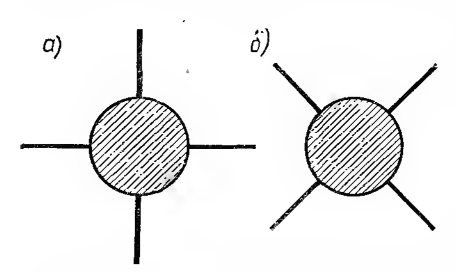


Рис. 5.1. Аэродинамические осесимметричные схемы ЛА

Первая баллистическая ракета имела восемь рулей, четыре из которых находились в набегающем воздушном потоке («воздушные» рули, монтировавшиеся на плоскостях хвостового оперения) и четыре — в газовой струе ракетного двигателя («газовые» рули). Каждый из газовых рулей приводился в движение своей рулевой машинкой. Воздушные рули *1'*, *3'*, расположенные на вертикальных плоскостях хвостового оперения, с помощью кулисных механизмов связывались соответственно с газовыми рулями *1* и *3* (см. рис. 5.2).

В схеме автомата стабилизации по крену вертикальные пары рулей *1* — *1'*, *3* — *3'* выполняли роль управляющих органов: при возникновении крена эти пары отклонялись автоматом в разные стороны. Функционирование канала рыскания вызывало синхронное движение вертикальных рулей *1*, *1'* и *3*, *3'*, а функционирование канала тангажа — синхронное движение горизонтальных газовых рулей *2*, *4*.

Аппараты с крестообразным расположением несущих поверхностей аэродинамически осесимметричны. Осесимметричность выражается в том, что в каком бы направлении ни отклонилась продольная ось аппарата от вектора скорости $\bar{V}$ при одном и том же угле отклонения возникает одна и та же боковая аэродинамическая сила. Благодаря

этому общие уравнения движения ракеты получаются более простыми, чем уравнения самолета.

Движение баллистической ракеты отсчитывается относительно определенной в § 4.1 стартовой системы координат $x_0y_0z_0$, плоскость x_0y_0 которой принимается за плоскость стрельбы, т. е. проходит через точку земной поверхности, в которой находится цель. Угловое положение ракеты в стартовой системе $x_0y_0z_0$ характеризуется углом тангажа ϑ (его плоскость совпадает с плоскостью стрельбы x_0y_0) углом

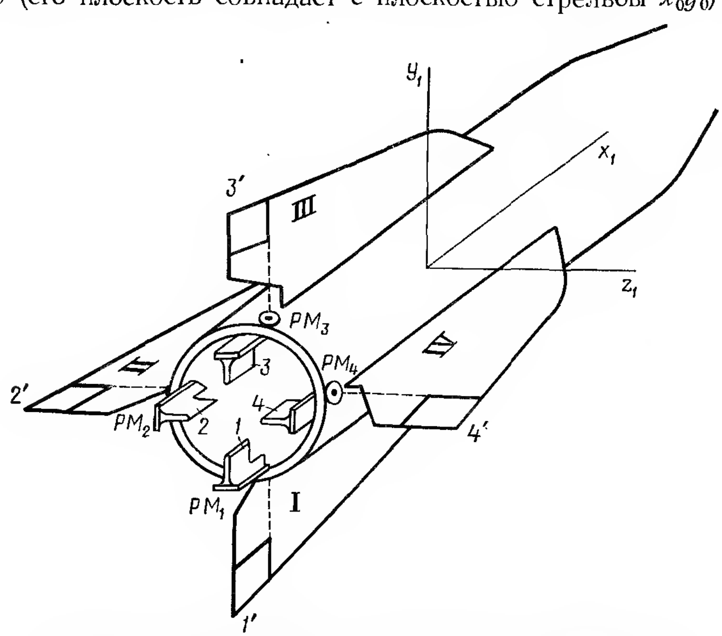


Рис. 5.2. Аэродинамическая схема баллистической ракеты:
I—III, *II—IV* — соответственно вертикальные и горизонтальные плоскости оперения; *1'*, *3'*, *2'*, *4'* — воздушные рули; *1*, *3*, *2*, *4* — газовые рули

рыскания ψ (углом между продольной осью и плоскостью стрельбы) и углом крена γ. Последовательность ввода углов Эйлера ϑ, ψ, γ отличается от последовательности, принятой для самолетов.

Настоящая глава посвящена математическим моделям баллистической ракеты как объекта управления, которые, помимо указанных особенностей, учитывают перекрестные связи между каналами управления, изгибные колебания продольной оси, колебания жидкого наполнения баков и инерционную реакцию камеры ракетного двигателя.

§ 5.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКОЙ РАКЕТЫ

Баллистическая ракета с жидкостными двигателями — система переменного состава. При составлении уравнений движения этой системы можно воспользоваться принципом затвердевания, заключающимся в следующем. Уравнения движения системы переменного

состава в произвольный момент t можно записать как уравнения движения твердого тела, получающегося в результате затвердевания системы переменного состава в момент t. В соответствии с данным принципом будем считать ракету жестким телом с постоянной массой m_0 и описывать как свободное твердое тело уравнениями:

$$d\bar{Q}/dt = \bar{F}; \tag{5.1а}$$

$$d\bar{G}/dt = \bar{M}, \tag{5.1б}$$

выражающими соответственно теорему о количестве движения и теорему о моменте количества движения. В этих уравнениях $\bar{F}$ — главный вектор внешних сил; $\bar{M}$ — главный момент относительно центра масс внешних сил, действующих на ракету; $\bar{Q}$ и $\bar{G}$ — соответственно векторы количества движения центра масс и момента количества движения ракеты относительно центра масс [23].

Для получения наиболее простых скалярных уравнений целесообразно представить векторные уравнения (5.1 а) в проекциях на оси полускоростной системы координат $x^*y^*z^*$, а векторное уравнение (5.1 б) — в проекциях на оси связанной с ракетой системы $x_1y_1z_1$ (проектирование входящих в (5.1 б) векторов на какие-либо оси, способные поворачиваться относительно связанной системы $x_1y_1z_1$, например, на оси $x^*y^*z^*$ полускоростной системы, привело бы к необходимости иметь дело с переменными моментами инерции).

Ось x^* полускоростной системы направлена вдоль вектора скорости $\bar{V}$ центра масс, а перпендикулярная ей ось y^*, будучи направлена кверху, все время находится в вертикальной плоскости x_0y_0 (рис. 5.3). Здесь имеется в виду скорость $\bar{V}$ ракеты относительно стартовой системы $x_0y_0z_0$, принимаемой за инерциальную систему отсчета. Положение полускоростной системы $x^*y^*z^*$ в только что указанной системе отсчета $x_0y_0z_0$ задается углами θ, Ψ, называемыми соответственно углом наклона траектории и углом поворота траектории. Матрица перехода от системы $x_0y_0z_0$ к системе $x^*y^*z^*$ определяется выражением

$$\mathbf{A}_{0*} = \mathbf{A}_{\Psi}\,\mathbf{A}_{\theta}, \tag{5.2}$$

где

$$\mathbf{A}_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{5.3}$$

$$\mathbf{A}_{\Psi} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & 0 & -\sin\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Psi & 0 & \cos\Psi \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Матрицы (5.2) ÷ (5.4) введены для того, чтобы можно было получить выражения проекций силы веса ракеты на оси полускоростной системы координат $x^*y^*z^*$.

Введем в рассмотрение *скоростную* систему координат xyz. Скоростная система получается из полускоростной $x^*y^*z^*$ поворотом последней вокруг оси x^* до совмещения оси z^* с плоскостью x_1z_1 связанной системы (на рис. 5.3 связанные оси $x_1y_1z_1$ не показаны). Соответствующий угол поворота γ_c, как и в случае связанной системы, называется углом крена. Углы γ_c и γ не одинаковы (хотя различие обычно невелико). Поскольку ось z скоростной системы лежит в плоскости x_1z_1 связанной системы, можно положение связанной системы $x_1y_1z_1$ в скоростной xyz определить двумя углами — углом атаки α и углом скольжения β (рис. 5.4).

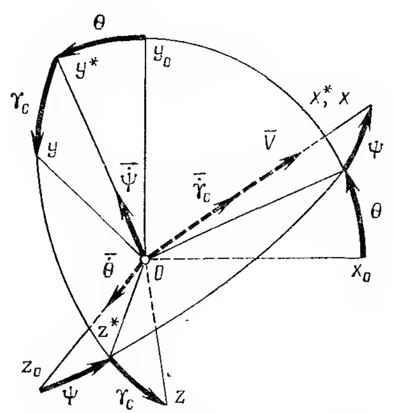


Рис. 5.3. Стартовая $x_0y_0z_0$, полускоростная $x^*y^*z^*$ и скоростная xyz системы координат

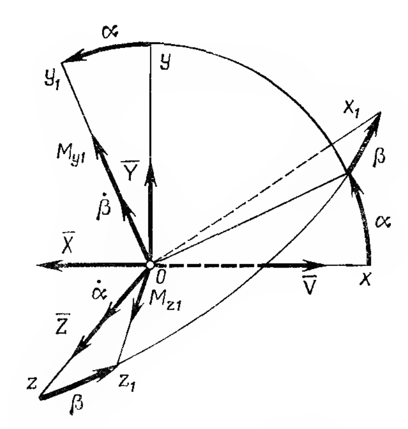


Рис. 5.4. Скоростная xyz и связанная $x_1y_1z_1$ системы координат

Необходимость введения скоростной системы обусловлена тем, что создаваемые рулями вокруг осей ракеты z_1, y_1 моменты M_{z1}, M_{y1} порождают упомянутые выше угол атаки α и угол скольжения β, которые в свою очередь создают аэродинамические силы Y, Z, направленные по осям y, z скоростной системы.

С помощью матрицы перехода от скоростной системы к полускоростной

$$A_{\gamma_c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_c & -\sin\gamma_c \\ 0 & \sin\gamma_c & \cos\gamma_c \end{bmatrix} \qquad (5.5)$$

можно найти проекции аэродинамических сил Y, Z на оси полускоростной системы, а при использовании матрицы перехода от связанной системы к полускоростной системе

$$A_{1*} = A_{\gamma_c}^{-1} A_{\alpha}^{-1} A_{\beta}^{-1}, \qquad (5.6)$$

где

$$\mathbf{A}_\beta^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_\alpha^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad(5.7)$$

— проекции силы тяги T ракетного двигателя на оси системы $x^*y^*z^*$.

Обратимся к рассмотрению левых частей уравнений (5.1). В уравнении (5.1а) предусматривается дифференцирование по времени вектора количества движения центра масс

$$\bar{Q}=m_0\bar{V}.\qquad(5.8)$$

где m_0 — масса объекта (в дальнейшем предполагается постоянной); $\bar{V}$ — скорость центра масс относительно инерциальной системы.

Как уже отмечалось, производная вектора равна скорости конца этого вектора. В данном случае речь идет о полной производной $d\bar{V}/dt$, т. е. о линейной скорости конца вектора $\bar{V}$ относительно инерциальной системы координат. Поскольку за инерциальную систему принимаем стартовую систему $x_0y_0z_0$ (см. § 4.1), необходимо вычислить скорость конца вектора $\bar{V}$ относительно системы $x_0y_0z_0$. Эта скорость, т. е. вектор $d\bar{V}/dt$, может быть вычислена по формуле (4.32).

Примем в качестве подвижной системы полускоростную систему координат $x^*y^*z^*$. Пусть $\bar{\omega}^*$ — угловая скорость полускоростной системы относительно стартовой системы $x_0y_0z_0$, а p^*, q^*, r^* — проекции вектора $\bar{\omega}^*$ на оси полускоростной системы. Обозначая через V_{x^*}, V_{y^*}, V_{z^*} проекции вектора скорости $\bar{V}$ на оси этой же системы и учитывая, что $V_{x^*}=V$, $V_{y^*}=V_{z^*}=0$ (упрощение скалярных уравнений, достигаемое проектированием векторного уравнения (5.1а) на оси полускоростной системы, обусловливается равенством нулю проекции V_{y^*}, V_{z^*}), получаем согласно (4.32) следующее разложение левой части (5.1а) по осям системы $x^*y^*z^*$.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt}=m_0\left\{\dot{V}\bar{i}^*+\begin{vmatrix}\bar{i}^* & \bar{j}^* & \bar{k}^*\\ p^* & q^* & r^*\\ V & 0 & 0\end{vmatrix}\right\}=m_0\left[\dot{V}\bar{i}^*+Vr^*\bar{j}^*-Vq^*\bar{k}^*\right].\qquad(5.9)$$

Так как вращение системы $x^*y^*z^*$ относительно системы $x_0y_0z_0$ характеризуется угловыми скоростями $\bar{\dot{\theta}}$, $\bar{\dot{\Psi}}$ (см. рис. 5.3), фигурирующие в (5.9) проекции p^*, q^*, r^* могут быть найдены из уравнения

$$\begin{bmatrix}p^*\\ q^*\\ r^*\end{bmatrix}=\mathbf{A}_\Psi\mathbf{A}_\theta\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}+\mathbf{A}_\Psi\begin{bmatrix}0\\ \dot{\Psi}\\ 0\end{bmatrix},\qquad(5.10)$$

где матрицы $\mathbf{A}_\theta$, $\mathbf{A}_\Psi$ определяются выражениями (5.3), (5.4).

Точно так же можно получить разложение левой части векторного уравнения (5.1б) по осям связанной системы $x_1y_1z_1$:

$$d\bar{G}/dt = (\dot{G}_{x_1} + qG_{z_1} - rG_{y_1})\,\bar{i}_1 + (\dot{G}_{y_1} + rG_{x_1} - pG_{z_1})\,\bar{j}_1 + + (\dot{G}_{z_1} + pG_{y_1} - qG_{x_1})\,\bar{k}_1, \qquad (5.11)$$

где p, q, r — проекции угловой скорости связанной системы $x_1y_1z_1$ относительно системы $x_0y_0z_0$ на оси связанной системы; G_{x_1}, G_{y_1}, G_{z_1} — проекции вектора момента количества движения (кинетического момента) на оси связанной системы.

Из рис. 4.2 видно, что

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_\gamma \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (5.12)$$

где матрицы перехода $\mathbf{A}_\psi$, $\mathbf{A}_\vartheta$, $\mathbf{A}_\gamma$ определяются выражениями (4.14) ÷ (4.16).

Проекции кинетического момента ракеты на связанные с ней оси в общем случае выражаются через моменты инерции ракеты и ее угловые скорости следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} G_{x_1} &= J_x p - J_{xy} q - J_{xz} r; \\ G_{y_1} &= -J_{xy} p + J_y q - J_{yz} r; \\ G_{z_1} &= -J_{xz} p - J_{yz} q + J_z r, \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

где $J_x = \Sigma m_i (y_1^2 + z_1^2)$; $J_y = \Sigma m_i (x_1^2 + z_1^2)$; $J_z = \Sigma m_i (x_1^2 + y_1^2)$ — моменты инерции ракеты относительно ее осей x_1, y_1, z_1; $J_{yz} = \Sigma m_i y_1 z_1$, $J_{xz} = \Sigma m_i x_1 z_1$, $J_{xy} = \Sigma m_i x_1 y_1$ — центробежные моменты инерции (m_i — масса элементарных частиц).

В качестве связанных осей выберем продольную ось ракеты x_1 и поперечные оси y_1, z_1, расположенные в плоскостях симметрии корпуса ракеты. Эти оси являются главными осями инерции ракеты, поэтому центробежные моменты инерции J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} равны нулю. При учете этого обстоятельства и (5.13) можно разложение (5.11) записать в виде

$$d\bar{G}/dt = [J_x \dot{p} + (J_z - J_y)\,qr]\,\bar{i}_1 + [J_y \dot{q} + (J_x - J_z)\,pr]\,\bar{j}_1 + + [J_z \dot{r} + (J_y - J_x)\,pq]\,\bar{k}_1. \qquad (5.14)$$

На ракету действуют сила тяги $\bar{T}$ ракетного двигателя, направленная по оси x_1 связанной системы; сила веса ракеты $m_0\bar{g}$, совпадающая с отрицательным направлением оси y_0 стартовой системы*; составляющие $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ аэродинамической силы по осям скоростной системы xyz;

* Вследствие небольшой протяженности активного участка траектории баллистической ракеты направление осей стартовой и земной систем координат можно считать одинаковыми.

составляющие M_x, M_y, M_z аэродинамического момента по осям связанной системы $x_1y_1z_1$; составляющие $M_{x\delta}$, $M_{y\delta}$, $M_{z\delta}$ момента от рулей по осям связанной системы; внешние возмущающие моменты m_x, m_y, m_z.

Боковая аэродинамическая сила Z, возникающая при положительном угле скольжения β, как это видно из рис. 5.4, действует в отрицательном направлении оси z скоростной системы. Это обстоятельство в аэродинамике учитывается знаком производной $c_z^\beta = \partial c_z/\partial\beta$ коэффициента c_z боковой силы по углу скольжения, а именно, в выражении $Z = (\rho V^2/2)\, S c_z^\beta \beta$ принимают $c_z^\beta < 0$. Следовательно, при формальном разложении полной аэродинамической силы по осям скоростной системы xyz необходимо составляющую Z считать направленной в положительном направлении оси z, как это сделано на рис. 5.4. Что касается подъемной силы Y, то при положительном угле атаки она направлена в положительном направлении оси y. Сила лобового сопротивления X всегда действует в отрицательном направлении оси x.

Учитывая сказанное, можно при использовании матриц перехода (5.3) — (5.7) выразить проекции приложенной к ракете результирующей силы на оси полускоростной системы следующим образом:

$$\begin{bmatrix} F_{x^*} \\ F_{y^*} \\ F_{z^*} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\Psi \mathbf{A}_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ -m_0 g \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{\gamma_c}^{-1} \mathbf{A}_\alpha^{-1} \mathbf{A}_\beta^{-1} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{\gamma_c}^{-1} \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Если от матричного выражения (5.15) перейти к поэлементным выражениям и, как это предусматривает уравнение (5.1а), приравнять соответственные составляющие выражений (5.9) и (5.15), то получим первые три уравнения приводимой ниже полной системы уравнений ракеты:

$$m_0 \dot{V} = T \cos\alpha \cos\beta - X - m_0 g \sin\theta \cos\Psi; \quad (5.16а)$$

$$m_0 V r^* = Y \cos\gamma_c - Z \sin\gamma_c - m_0 g \cos\theta + T (\sin\alpha \cos\beta \cos\gamma_c + \sin\beta \sin\gamma_c); \quad (5.16б)$$

$$m_0 V q^* = Z \cos\gamma_c - Y \sin\gamma_c + m_0 g \sin\theta \sin\Psi + T (\sin\beta \cos\gamma_c - \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma_c); \quad (5.16в)$$

$$J_x \dot{p} + (J_z - J_y)\, qr = M_x + M_{x\delta} + m_x; \quad (5.16г)$$

$$J_y \dot{q} + (J_x - J_z)\, pr = M_y + M_{y\delta} + m_y; \quad (5.16д)$$

$$J_z \dot{r} + (J_y - J_x)\, pq = M_z + M_{z\delta} + m_z; \quad (5.16е)$$

$$p = \dot{\gamma} - \dot{\vartheta} \sin\psi; \quad (5.16ж)$$

$$q = \dot{\psi} \cos\gamma + \dot{\vartheta} \cos\psi \sin\gamma; \quad (5.16з)$$

$$r = \dot{\vartheta} \cos\psi \cos\gamma - \dot{\psi} \sin\gamma; \quad (5.16и)$$

$$q^* = \dot{\Psi}; \quad (5.16к)$$

$$r^* = \dot{\theta} \cos\Psi; \quad (5.16л)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\vartheta(\cos\alpha\cos\beta\cos\psi - \sin\alpha\sin\psi\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\psi\cos\gamma) -}{\cos\vartheta(\cos\alpha\cos\beta\cos\psi - \sin\alpha\sin\psi\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\psi\cos\gamma) +} \ldots \to$$

$$\to \ldots \frac{-\cos\vartheta(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)}{+\sin\vartheta(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)}; \qquad (5.16м)$$

$$\sin\Psi = \cos\alpha\cos\beta\sin\psi + \sin\alpha\cos\psi\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\psi\cos\gamma; \quad (5.16н)$$

$$\sin\gamma_c = \sin\theta[\cos\vartheta(-\sin\beta\cos\psi + \cos\beta\sin\psi\cos\gamma) +$$
$$+ \cos\beta\sin\vartheta\sin\gamma] - \cos\theta[\sin\vartheta(-\sin\beta\cos\psi + \cos\beta\sin\psi\cos\gamma) -$$
$$- \cos\beta\cos\vartheta\sin\gamma]. \qquad (5.16о)$$

Первые три уравнения представляют собой уравнения сил, действующих на ракету. Следующие три уравнения, (5.16г, д, е) — суть уравнения моментов. Они получаются приравниванием составляющих кинетического момента (5.14) суммарным моментам вокруг соответствующих осей связанной системы и называются *динамическими уравнениями Эйлера*. Уравнения (5.16ж, з, и) получаются приравниванием соответственных элементов матричного уравнения (5.12) и выражают проекции угловой скорости связанной системы через скорости изменения углов Эйлера. Эти уравнения называются *кинематическими уравнениями Эйлера*. Уравнения (5.16к, л) — также кинематические уравнения Эйлера, но для полускоростной системы $x^*y^*z^*$. Они получаются из матричного уравнения (5.10). И, наконец, последние три уравнения выражают геометрическую связь между различными углами. Уравнения (5.16м, н) получаются из матричного соотношения

$$\mathrm{A}_\theta^{-1}\mathrm{A}_\Psi^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \mathrm{A}_\vartheta^{-1}\mathrm{A}_\psi^{-1}\mathrm{A}_\gamma^{-1}\mathrm{A}_\beta\mathrm{A}_\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad (5.17)$$

левая и правая части которого выражают проекции единичного вектора вдоль оси x^* на оси стартовой системы $x_0y_0z_0$, а уравнение (5.16 о) — из матричного соотношения

$$\mathrm{A}_{\gamma_c}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \mathrm{A}_\Psi\mathrm{A}_\theta\mathrm{A}_\vartheta^{-1}\mathrm{A}_\psi^{-1}\mathrm{A}_\gamma^{-1}\mathrm{A}_\beta\mathrm{A}_\alpha\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad (5.18)$$

обе части которого дают выражение проекций единичного вектора вдоль оси z на оси полускоростной системы $x^*y^*z^*$.

Исследованию угловых колебаний ракеты относительно центра масс обычно предшествует расчет траектории центра масс. Этот расчет проводится в предположении, что малые угловые отклонения ψ, γ, $\Delta\vartheta$ ракеты от программных значений $\psi_{пр} = 0$, $\gamma_{пр} = 0$, $\vartheta_{пр}(t)$ не влияют на движение ее центра масс. Основываясь на этом предположении, при расчете траектории в уравнениях (5.16) полагают $\psi = \psi_{пр} = 0$, $\gamma = \gamma_{пр} = 0$, $\vartheta = \vartheta_{пр}(t)$.
Аэродинамические силы считаются при этом зависящими от «балансировочного» значения $\alpha_б$ угла атаки (для угла скольжения $\beta_б = 0$).

Когда углы принимают программные значения, из гравитационных членов остаются только $-m_0 g \sin \theta_б$ и $m_0 g \cos \theta_б$, в которых

$$\theta_б = \operatorname{arctg} \frac{\sin \vartheta_{пр} \cos \alpha_б - \cos \vartheta_{пр} \sin \alpha_б}{\cos \vartheta_{пр} \cos \alpha_б + \sin \vartheta_{пр} \sin \alpha_б}.$$

Расчет траектории дает скорость V центра масс в виде определенной (программной) функции времени. Небольшие отклонения ΔV от этой программной скорости, возможные из-за угловых колебаний ракеты, устраняются системой программного регулирования кажущейся скорости (система РКС), изменяющей тягу двигателя в зависимости от показаний интегратора продольных ускорений (см. § 5.5). Поэтому в дальнейшем скорость V будем считать известной функцией времени и исключать ее из числа неизвестных координат. Вследствие этого при излучении угловых колебаний ракеты первое уравнение системы (5.16) становится ненужным. Оставшиеся тринадцать уравнений описывают угловые колебания ракеты, причем в этих уравнениях V, m_0, J_x, J_y, J_z — известные функции времени.

§ 5.2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СТАТИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ

Для удержания продольной оси ракеты в положении, параллельном плоскости стрельбы, требуется не только канал стабилизации ракеты по углу рыскания ψ, но, как это показывается далее, и канал стабилизации по углу крена. Поддержание с помощью этих каналов стабилизации равенств $\psi \approx 0$, $\gamma \approx 0$ обеспечивает справедливость принятого в предыдущем параграфе предположения о малости ψ и γ.

Таким образом, с учетом канала, необходимого для управления ракетой по углу тангажа, вся система управления угловым положением баллистической ракеты состоит из трех каналов, а именно, канала рыскания, канала крена и канала тангажа.

Принципиальная схема каждого из трех каналов одна и та же и характеризуется отсутствием в автомате стабилизации интегрирующего звена. Поэтому по углам γ, ψ, ϑ осуществляется статическое регулирование в отношении приложенных к ракете внешних моментов m_x, m_y, m_z. Вследствие статизма регулирования при $m_{x_0} = \text{const}$, $m_{y_0} = \text{const}$ и $m_{z_0} = \text{const}$ устанавливаются некоторые равновесные (статические) значения координат*:

$$\left.\begin{aligned} &\psi = \psi_0, \ \gamma = \gamma_0, \ \vartheta = \vartheta_0, \ \theta = \theta_0, \ \Psi = \Psi_0, \ \gamma_c = \gamma_{c0}; \\ &\alpha = \alpha_0, \ \beta = \beta_0, \ p_0 = q_0 = r_0 = 0, \ q_0^* = r_0^* = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

Произведем линеаризацию нелинейных уравнений (5.16) около равновесных значений координат (5.19). Линеаризация заключается в представлении любой координаты в виде суммы равновесного значения и малого отклонения от равновесного значения, называемого вариацией, подстановке этих сумм в нелинейные уравнения, разло-

---

* Принимаем $\vartheta_{пр}(t) = \text{const}$, вследствие чего $r_0 = r_0^* = 0$.

жении нелинейных функций в ряды Тейлора в отношении вариаций и после отбрасывания в этих рядах членов, содержащих произведения и степени вариаций, а также членов, зависящих только от равновесных значений (в каждом из уравнений эти члены в сумме равны нулю), записи всех уравнений как линейных дифференциальных уравнений относительно вариаций.

Можно, минуя указанные операции, сразу прийти к уравнениям в вариациях. Для этого необходимо нелинейные уравнения проварьировать. Процесс варьирования аналогичен процессу взятия дифференциала от каждого члена уравнения. Отличие заключается лишь в том, что бесконечно малое приращение аргумента (дифференциал) заменяется конечным приращением (вариацией). Кроме того, следует учитывать, что при варьировании произведения неварьируемые сомножители берутся при равновесных значениях аргументов.

Перед тем как переходить к варьированию необходимо установить зависимость аэродинамических сил и моментов от координат системы и скоростей их изменения. Как уже отмечалось, силы Y и Z зависят соответственно от угла атаки α и от угла скольжения β. Аэродинамические моменты M_z, M_y также являются функциями соответственно от α и β. Кроме того, эти моменты, а также момент M_x, зависят соответственно от угловых скоростей r, q, p. Моменты $M_{x\delta}$, $M_{y\delta}$, $M_{z\delta}$ пропорциональны отклонению соответствующих рулей от нейтрального положения. Коэффициенты пропорциональности отрицательны и в дальнейшем обозначаются как $-C_2$, где $C_2 > 0$.

Подставляя теперь выражения (5.16к, л), (5.16ж, з, и) соответственно в уравнения (5.16б, в) и (5.16г, д, е) и производя варьирование, получим следующую систему линейных уравнений относительно малых отклонений координат от равновесных значений (5.19)*:

$$m_0 V\dot{\theta}\cos\Psi_0 = [Y^{\alpha}|_{\alpha_0}\cos\gamma_{c0} + T\cos\alpha_0\cos\beta_0\cos\gamma_{c0}]\,\alpha + \\ + [-Z^{\alpha}|_{\beta_0}\sin\gamma_{c0} + T(\cos\beta_0\sin\gamma_{c0} - \sin\alpha_0\sin\beta_0\cos\gamma_{c0})]\,\beta + \\ + [-Y_0\sin\gamma_{c0} - Z_0\cos\gamma_{c0} + T(\sin\beta_0\cos\gamma_{c0} - \sin\alpha_0\cos\beta_0 \times \\ \times \sin\gamma_{c0})]\,\gamma_c + m_0 g\sin\theta_0\,\theta. \qquad (5.20а)$$

$$m_0 V\dot{\Psi} = [-Z^{\beta}|_{\beta_0}\cos\gamma_{c0} + T(\cos\beta_0\cos\gamma_{c0} + \sin\alpha_0\sin\beta_0\sin\gamma_{c0})]\beta + \\ + [-Y^{\alpha}|_{\alpha_0}\sin\gamma_{c0} - T\cos\alpha_0\cos\beta_0\sin\gamma_{c0}]\,\alpha - [-Z_0\sin\gamma_{c0} + Y_0\cos\gamma_{c0} + \\ + T(\sin\beta_0\sin\gamma_{c0} + \sin\alpha_0\cos\beta_0\cos\gamma_{c0})]\,\gamma_c + m_0 g\cos\theta_0\sin\Psi_0\,\theta + \\ + m_0 g\sin\theta_0\cos\Psi_0\,\Psi; \qquad (5.20б)$$

$$J_x(\ddot{\gamma} - \ddot{\vartheta}\sin\psi_0) = -D_x(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}\sin\psi_0) - C_2'\,\delta_к + m_x; \qquad (5.20в)$$

$$J(\ddot{\psi}\cos\gamma_0 + \ddot{\vartheta}\cos\psi_0\sin\gamma_0) = M_y^{\beta}|_{\beta_0}\beta - D(\dot{\psi}\cos\gamma_0 + \\ + \dot{\vartheta}\cos\psi_0\sin\gamma_0) - C_2\,\delta_р + m_y; \qquad (5.20г)$$

---

* Малые отклонения (вариации) обозначены в уравнениях (5.20) теми же буквами, что и сами координаты.

$$J(\ddot{\vartheta}\cos\psi_0\cos\gamma_0-\ddot{\psi}\sin\gamma_0)=M_z^\alpha|_{\alpha_0}\alpha-D(\dot{\vartheta}\cos\psi_0\cos\gamma_0-\dot{\psi}\sin\gamma_0)-$$
$$-C_2\delta_T+m_z; \qquad (5.20д)$$

$$\theta=a_1\vartheta+a_2\psi+a_3\gamma+a_4\alpha+a_5\beta; \qquad (5.20е)$$

$$\Psi=b_1\psi+b_2\gamma+b_3\alpha+b_4\beta; \qquad (5.20ж)$$

$$\gamma_c=d_1\gamma+d_2\vartheta+d_3\psi+d_4\alpha+d_5\beta. \qquad (5.20з)$$

В этих уравнениях частная производная какой-либо функции обозначается той же буквой, что и сама функция, но с верхним индексом, указывающим параметр, по которому берется производная. Например, $M_y^\beta|_{\beta_0}$ обозначает частную производную, $\partial M_y/\partial\beta$, взятую при равновесном значении β_0. Частные производные M_x^p, M_y^q, M_z^r, образующиеся при варьировании аэродинамических моментов по угловой скорости, отрицательны и обозначены в уравнениях соответственно $-D_x$, $-D$, $-D$, где $D_x>0$, $D>0$.

В уравнениях учтена симметрия корпуса ракеты относительно продольной оси, благодаря которой моменты инерции, коэффициенты демпфирования и коэффициенты эффективности рулей относительно поперечных осей y_1, z_1 одинаковы. Фигурирующие в уравнениях (5.20 е, ж, з) коэффициенты a_i, b_j, d_k суть функции равновесных значений ϑ_0, ψ_0, γ_0, α_0, β_0.

§ 5.3. ПЕРЕКРЕСТНЫЕ СВЯЗИ ИЗ-ЗА НЕСОВПАДЕНИЯ ОСЕЙ

Линеаризованная система уравнений (5.20) оказалась довольно сложной. Чтобы анализ основных перекрестных связей между каналами был достаточно простым, примем следующее допущение. Будем считать, что вектор скорости $\overline{V}$ центра масс сохраняет постоянное направление, определяемое углами ψ_0, ϑ_0 и постоянен по величине. Тогда соблюдаются следующие равенства между вариациями:

$$\alpha=\vartheta,\ \beta=\psi. \qquad (5.21)$$

При учете этих равенств уравнения (5.20 в, г, д) выделяются в независимую систему уравнений. Считаем $m_0=\mathrm{const}$, $J=\mathrm{const}$, $J_x=\mathrm{const}$. В этом случае выделившаяся система представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и ее можно записать в операторной форме:

$$(J_x s^2+D_x s)\hat{\gamma}=(J_x\sin\psi_0 s^2+D_x\sin\psi_0 s)\hat{\vartheta}-C_2'\hat{\delta}_k+M_x; \qquad (5.22а)$$

$$(J\cos\gamma_0 s^2+D\cos\gamma_0 s\pm C_1)=-(J\cos\psi_0\sin\gamma_0 s^2+$$
$$+D\cos\psi_0\sin\gamma_0 s)\hat{\vartheta}-C_2\hat{\delta}_p+M_y; \qquad (5.22б)$$

$$(J\cos\psi_0\cos\gamma_0 s^2+D\cos\psi_0\cos\gamma_0 s\pm C_1)\hat{\vartheta}=(J\sin\gamma_0 s^2+$$
$$+D\sin\gamma_0 s)\hat{\psi}-C_2\hat{\delta}_T+M_z, \qquad (5.22в)$$

где M_x, M_y, M_z — вариации внешних моментов; $C_1 = |M_z^\alpha|_{\alpha_0} = (\rho V^2/2) SL |m_z^\alpha|_{\alpha_0}$ — коэффициент, учитывающий флюгерность ракеты ($C_1 > 0$).

Производная коэффициента момента по углу атаки (динамический коэффициент $m_z^\alpha|_{\alpha_0}$) берется при отличном от нуля равновесном значении α_0 и может несколько отличаться от обычно используемого значения $m_z^\alpha|_{\alpha=0}$. Если ракета статически неустойчива, т. е. ее передаточная функция имеет положительный действительный полюс, то $m_z^\alpha|_{\alpha_0} > 0$. В противоположном случае (статически устойчивая ракета) $m_z^\alpha|_{\alpha_0} < 0$. Для статически устойчивой ракеты в уравнениях (5.22 б, в) и во всех последующих уравнениях перед коэффициентом C_1 берется верхний знак, а для статически неустойчивой — нижний знак.

Так как в дальнейшем производится сравнительный анализ влияния различных перекрестных связей, будем для простоты полагать, что в отдельных каналах применяются идеальные автоматы стабилизации, осуществляющие регулирование по отклонению и по первой производной (вместо действительно применявшихся в баллистических ракетах автоматов с регулированием по отклонению, угловой скорости и угловому ускорению). Для отдельных каналов уравнения ракеты (5.22 а, б, в) имеют только второй порядок. Поэтому регулирование по второй производной не открывает дополнительных возможностей для улучшения демпфирования свободных колебаний.

Добавляя к уравнениям ракеты (5.22 а, б, в) уравнения таких автоматов

$$\left.\begin{aligned} \delta_к &= a_0' \gamma + a_1' \dot{\gamma}; \\ \delta_р &= a_0 \psi + a_1 \dot{\psi}; \\ \delta_T &= a_0 \vartheta + a_1 \dot{\vartheta}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.23)$$

получим замкнутую систему уравнений.

Структурная схема «ракета — система стабилизации», составленная по уравнениям (5.22), (5.23), показана на рис. 5.5. Передаточные функции $W_i(s)$ перекрестных связей этой схемы определяются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} W_1(s) &= -s(J \cos\psi_0 \sin\gamma_0 s + D \cos\psi_0 \sin\gamma_0); \\ W_2(s) &= s(J \sin\gamma_0 s + D \sin\gamma_0); \\ W_3(s) &= s(J_x \sin\psi_0 s + D_x \sin\psi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (5.24)$$

Структурная схема состоит из связанных друг с другом замкнутых контуров *I*, *II*, *III*, соответствующих каналам стабилизации по рысканию, тангажу и крену. Контур крена испытывает со стороны контура тангажа воздействие N, не оказывая сам воздействий на контуры *I*, *II*. Поэтому за счет связи W_3 какие-либо замкнутые контуры

не возникают. Напротив, благодаря перекрестным связям W_1, W_2 образуется замкнутый контур, звеньями которого, помимо звеньев связи W_1, W_2, служат контуры *I*, *II* стабилизации. Будем называть этот контур главным.

Возникновение перекрестных связей W_1. W_2, W_3 объясняется тем, что система координат, в которой работают управляющие органы (рули), отличается от системы координат, в которой измеряются отклонения ϑ, ψ. Отличие выражается в перекосе осей z_1, y_1 связанной системы, вокруг которых действуют моменты от рулей, относи-

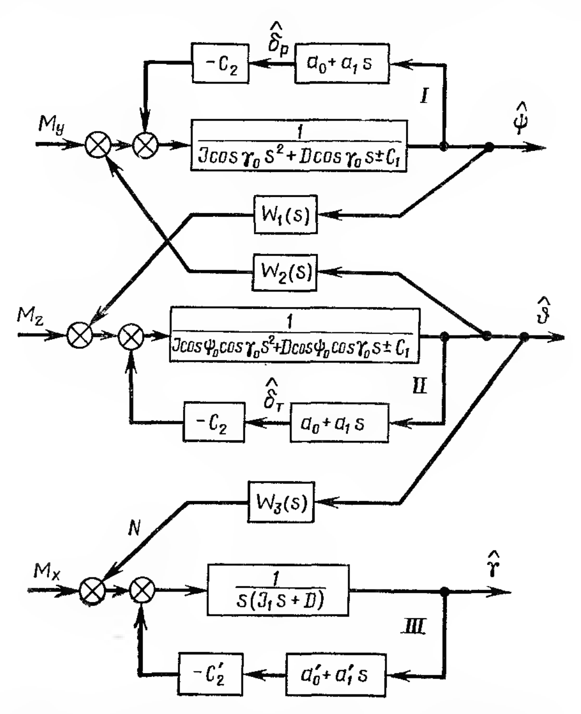


Рис. 5.5. Структурная схема системы стабилизации ракеты, учитывающая статические отклонения

тельно осей z_0, y'_1, вокруг которых отсчитываются стабилизируемые углы ϑ, ψ (см. рис. 4.2). Перекос тем больше, чем больше равновесные значения ϑ_0, ψ_0, γ_0.

Произведем исследование устойчивости главного контура. В этом контуре осуществляется отрицательная обратная связь. Передаточная функция по контуру имеет вид $G(s) = -W_I(s)\, W_{II}(s) \times \times W_1(s)\, W_2(s)$, где сомножители в правой части суть передаточные функции замкнутых контуров *I*, *II* и звеньев связи. Принимая во внимание (5.24) и рис. 5.5, можно характеристическое уравнение замкнутого главного контура $1 + G(s) = 0$ привести к виду

$$A_0 s^4 + A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4 = 0, \qquad (5.25$$

где

$$\left.\begin{aligned}&A_0=J^2\cos\psi_0,\ \ A_1=2JD\cos\psi_0+JC_2a_1\cos\gamma_0(1+\cos\psi_0);\\&A_2=[J(a_0C_2\pm C_1)+DC_2a_1]\cos\gamma_0(1+\cos\psi_0)+\\&\quad+D^2\cos\psi_0+C_2^2a_1^2;\\&A_3=D(a_0C_2\pm C_1)\cos\gamma_0(1+\cos\psi_0)+2C_2^2a_0a_1\pm 2C_1C_2a_1;\\&A_4=(C_2a_0\pm C_1)^2.\end{aligned}\right\}\tag{5.26}$$

Условия устойчивости Гурвица для системы четвертого порядка, помимо требования положительности коэффициентов A_i, сводятся к соблюдению неравенства

$$A_1(A_2A_3-A_1A_4)-A_0A_3^2>0.\tag{5.27}$$

Подставляя в это неравенство выражения (5.26), получим для частного случая $\psi_0=0$ следующее ограничение на установившийся угол крена γ_0:

$$\begin{aligned}&(C_2a_0\pm C_1)\{2DC_2a_1[J(C_2a_0\pm C_1)+DC_2a_1)\cos^3\gamma_0+\\&+(D^2+C_2^2a_1^2)[J(C_2a_0\pm C_1)+3DC_2a_1]\cos^2\gamma_0+\\&+[(D^2+C_2^2a_1^2)^2-2JDC_2a_1(C_2a_0\pm C_1)+2D^2C_2^2a_1^2]\cos\gamma_0+\\&+(D^2+C_2^2a_1^2)[DC_2a_1-J(C_2a_0\pm C_1)]\}>0.\end{aligned}\tag{5.28}$$

Пусть при $\gamma_0=0$ ракета представляет собой колебательное звено с параметрами $\omega_n=0{,}35$ 1/с, $\zeta=0{,}15$. Это означает, что знаменатель передаточной функции ракеты $s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2=s^2+2\cdot0{,}15\times\times0{,}35\,s+0{,}35^2$.

Принимая во внимание выражение этого знаменателя, указанное на рис. 5.5 (контур I), приходим к выводу, что перед C_1 необходимо взять знак плюс. Тогда

$$s^2+Ds/J+C_1/J=s^2+2\cdot0{,}15\cdot0{,}35s+0{,}35^2.\tag{5.29}$$

Отсюда находим

$$D=0{,}1\,J,\qquad C_1=0{,}13\,J.\tag{5.30}$$

Знаменатель передаточной функции замкнутого контура стабилизации I имеет вид

$$s^2+(D+C_2a_1)\,s/J+(C_2a_0+C_1)/J.\tag{5.31}$$

Соответственно выбрав параметры настройки a_0, a_1 автомата стабилизации, придадим этому контуру оптимальное демпфирование $\zeta=0{,}7$ и недемпфированную частоту $\omega_n=2$ (1/с). Приравнивая коэффициенты выражения (5.31) соответствующим коэффициентам полинома $s^2+2\cdot0{,}7\cdot2s+2^2$ и учитывая (5.30), находим

$$C_2a_1=2{,}7J,\ C_2a_0+C_1=4J.\tag{5.32}$$

Подставляя (5.30), (5.32) в (5.28), получим уравнение относительно предельно допустимого значения γ_0:

$$2{,}3\cos^3\gamma_0+30{,}3\cos^2\gamma_0+37{,}65\cos\gamma_0-23{,}5=0.$$

Это уравнение имеет корень $\cos\gamma_0 = 0{,}453$. Отсюда находим, что равновесные значения угла крена, допустимые с точки зрения устойчивости всей системы, лежат в диапазоне

$$-63^\circ < \gamma_0 < 63^\circ. \qquad (5.33)$$

В действительности этот диапазон значительно уже (при расчете автомат стабилизации предполагался идеальным). Таким образом, перекрестные связи между каналами, возникающие при статических отклонениях из-за несовпадения измерительных и исполнительных осей, могут приводить к неустойчивости всей системы стабилизации ракеты в целом.

§ 5.4. ПЕРЕКРЕСТНЫЕ СВЯЗИ ИЗ-ЗА КАРДАННЫХ ОШИБОК

В § 4.6 было показано, что сигналы α, β, α_Γ, снимаемые с осей гировертиканта и гирогоризонта, зависят не только от угла Эйлера ракеты, для измерения которого соответствующая ось предназначена, но и от двух других углов Эйлера (карданные ошибки). При наличии статических отклонений $\vartheta_0, \psi_0, \gamma_0$ это обстоятельство порождает перекрестные связи между каналами системы стабилизации ракеты.

Пусть α_0, β_0, $\Delta\alpha_{\Gamma 0}$ — равновесные (статические) отклонения на потенциометрических датчиках Π_ψ, Π_γ и $\Pi_{\Delta\vartheta}$ (см. рис. 4.8), наблюдающиеся при равновесных значениях ϑ_0, ψ_0, γ_0 углов Эйлера. Согласно формулам (4.29), (4.31) указанные равновесные значения связаны следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha_0 = \operatorname{tg}\psi_0/\cos\gamma_0;\\ &\sin\beta_0 = \sin\gamma_0\cos\psi_0;\\ &\Delta\alpha_{\Gamma_0} = \operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta_0\cos\psi_0}{\cos\vartheta_0\cos\gamma_0 + \sin\vartheta_0\sin\psi_0\sin\gamma_0} - \vartheta_{\text{пр}}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.34)$$

Производя линеаризацию около равновесных значений нелинейных уравнений (4.29), (4.30) и принимая во внимание соотношения (5.34), получим

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = K_1\psi + K_2\gamma;\\ &\beta = K_3\gamma + K_4\psi;\\ &\Delta\alpha_\Gamma = K_5\vartheta + K_6\psi + K_7\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (5.35)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &K_1 = \frac{\cos\gamma_0}{\cos^2\psi_0\cos^2\gamma_0 + \sin^2\psi_0}; \quad K_2 = \frac{\operatorname{tg}\psi_0\sin\gamma_0}{\cos^2\gamma_0 + \operatorname{tg}^2\psi_0};\\ &K_3 = \frac{\cos\psi_0\cos\gamma_0}{\sqrt{1-\sin^2\gamma_0\cos^2\psi_0}}; \quad K_4 = -\frac{\sin\psi_0\sin\gamma_0}{\sqrt{1-\sin^2\gamma_0\cos^2\psi_0}};\\ &K_5 = \frac{\cos\psi_0\cos\gamma_0}{(\cos\vartheta_0\cos\gamma_0 + \sin\vartheta_0\sin\psi_0\sin\gamma_0)^2 + \sin^2\vartheta_0\cos^2\psi_0};\\ &K_6 = -\frac{\sin^2\vartheta_0\sin\gamma_0 + \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\sin\psi_0\cos\gamma_0}{(\cos\vartheta_0\cos\gamma_0 + \sin\vartheta_0\sin\psi_0\sin\gamma_0)^2 + \sin^2\vartheta_0\cos^2\psi_0};\\ &K_7 = -\frac{\sin\vartheta_0\cos\psi_0(-\cos\vartheta_0\sin\gamma_0 + \sin\vartheta_0\sin\psi_0\cos\gamma_0)}{(\cos\vartheta_0\cos\gamma_0 + \sin\vartheta_0\sin\psi_0\sin\gamma_0)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.36)$$

Добавим теперь к структурной схеме рис. 5.5 связи, соответствующие уравнениям (5.35). Учитывая, что на входы автоматов стабилизации поступают сигналы α, $\Delta\alpha_Г$, β, определяемые уравнениями (5.35), приходим к структурной схеме, показанной на рис. 5.6.

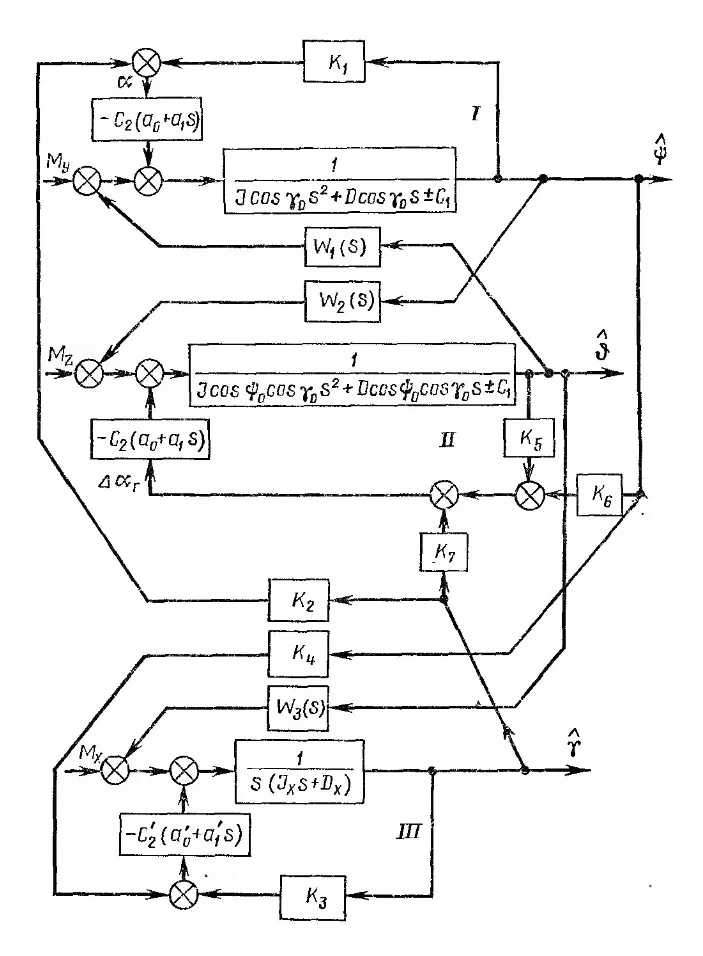


Рис. 5.6. Структурная схема системы стабилизации при наличии статических отклонений и карданных ошибок

Структурная схема состоит из трех взаимосвязанных каналов стабилизации. Благодаря добавившимся связям K_2, K_3 возникает замкнутый контур $I - K_4 - III - K_2$. В этом контуре осуществляется отрицательная обратная связь, так как число его звеньев, инвертирующих знак входного сигнала, нечетно. Кроме этого, образуется еще замкнутый контур $III - K_7 - II - W_3$, а к перекрестной связи $W_2(s)$ добавляется параллельная связь $- K_6C_2(a_0 + a_1s)$.

Для частного случая $\psi_0 = 0$ структурная схема, как это видно из (5.36), распадается на изолированный канал крена и двухканальную систему с перекрестными связями. Двухканальная система, получающаяся при объединении параллельных связей $W_2(s)$ и $-K_6C_2(a_0 + a_1s)$ в одну и замене $W_1(s)$, $W_2(s)$, K_1, K_5, K_6 выражениями (5.24), (5.36), представлена на рис. 5.7. Анализ этой схемы, аналогичный выполненному для схемы на рис. 5.5, показывает, что при значениях параметров (5.30), (5.32) и $\vartheta_0 = 90°$ система устойчива в диапазоне равновесных значений угла крена $-90° \leqslant \gamma_0 \leqslant 90°$.

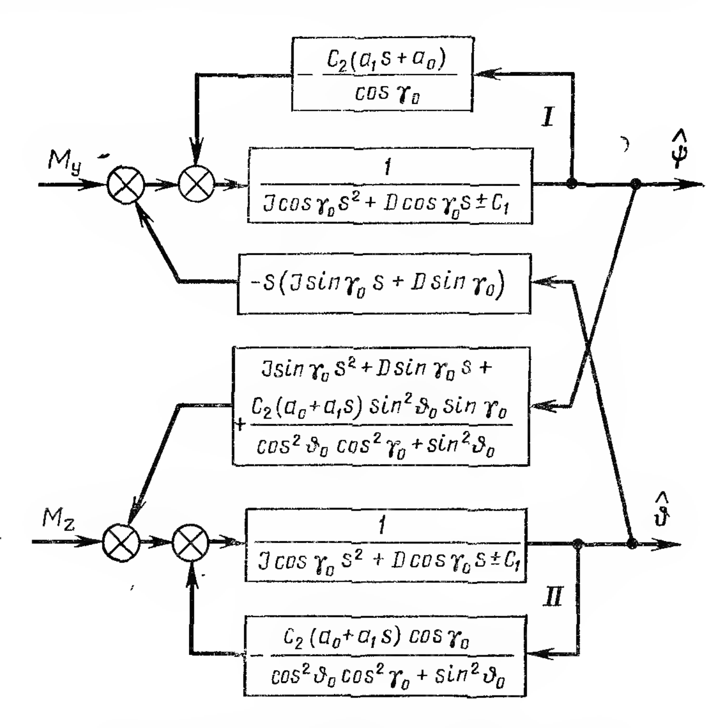


Рис. 5.7. Система стабилизации ракеты по рысканию и тангажу при наличии статических отклонений и карданных ошибок

При отсутствии карданных ошибок эта же система имеет более узкий диапазон устойчивости (5.33).

Расширение диапазона устойчивости двухканальной системы стабилизации по рысканию и тангажу, вызываемое для частного случая $\psi_0 = 0$, $\vartheta_0 = 90°$ карданными ошибками гирогоризонта и гировертиканта, не позволяет еще сделать вывод о благоприятном влиянии карданных ошибок на устойчивость в любом случае (например, при $\psi_0 \neq 0$, канал крена не отделяется от каналов тангажа и рыскания, так что вместо двухканальной надо рассматривать трехканальную систему, показанную на рис. 5.6).

§ 5.5. СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ*

Баллистическая ракета стабилизируется по всем трем углам Эйлера, причем по углу тангажа помимо стабилизации производится и управление. Необходимость стабилизации по углу рыскания ψ, а также стабилизации и управления по углу тангажа ϑ очевидна, так как без обеспечения $\psi \approx 0$ и определенной программы изменения ϑ ракета не могла бы летать в сторону цели. Что касается канала стабилизации ракеты по крену (канал γ), то он необходим: 1) для обеспечения устойчивости трехканальной системы стабилизации в целом (см. § 5.4); 2) для создания условий точной отработки программного разворота ракеты (см. § 4.6); 3) для предотвращения складывания рамок карданова подвеса гирогоризонта и гировертиканта, из-за которого эти приборы делаются неработоспособными.

Если вместо гирогоризонта и гировертиканта использовать гиростабилизированную платформу, канал стабилизации по крену по-прежнему необходим, так как без этого канала из-за несовпадения осей измерения и отработки возникает неустойчивость всей системы (см. § 5.3).

Помимо трех каналов угловой стабилизации система управления современных баллистических ракет содержит еще каналы стабилизации положения центра масс относительно программной траектории в продольной и боковой плоскостях.

Система управления ракеты ФАУ-2. Трехканальная система стабилизации ракеты ФАУ-2 относительно центра масс является типичным примером автопилота прямой схемы. В каждом из каналов ϑ, ψ и γ с помощью гирогоризонта или гировертиканта измеряется отклонение соответствующего угла от программного значения $\vartheta_0(t)$, $\psi_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, дважды дифференцируется RC-контуром и преобразованный сигнал (например, в канале рыскания преобразованный сигнал выражается суммой $a_0\psi + a_1\dot{\psi} + a_2\ddot{\psi}$) после усиления создает при помощи электрогидравлических рулевых машинок пропорциональное отклонение соответствующих управляющих органов (см. вводную часть главы V). Не останавливаясь на деталях схемного выполнения каналов, рассмотрим более подробно систему управления дальностью полета.

Для попадания в цель помимо удержания продольной оси в определенном угловом положении требуется и создание определенного значения линейной скорости ракеты в конце активного участка траектории. Последнее осуществлялось в ракете ФАУ-2 гироскопическим интегратором продольных ускорений (рис. 5.8). Этот прибор представляет собой гироскопический маятник, имеющий маятниковость только относительно оси *3* вращения внутренней рамки *2*. Другими словами, центр тяжести системы «гироскоп *1* — рамка *2*» находится на оси вращения *5*, наружной рамки *4*, но смещен от оси *3* вращения внутренней рамки на расстояние l. Ось вращения *5* наружной рамки

---

* См. также § 4.1, § 4.6 и вводную часть гл. V.

устанавливалась в связанных с корпусом ракеты подшипниках параллельно продольной оси ракеты.

На гироскоп *1* вокруг оси вращения *3* действует момент от сил инерции переносного движения, пропорциональный продольному ускорению ракеты dV/dt, и момент $lmg \sin \vartheta$ от силы веса системы «гироскоп *1* — внутренняя рамка *2*». Указанные моменты создают прецессию гироскопа вокруг оси вращения наружной рамки, т. е. вращение гироскопа вместе с наружной рамкой вокруг оси *5* со скоростью, пропорциональной суммарному моменту. Угол $\alpha_р$ поворота рамки *4* равен интегралу от скорости прецессии:

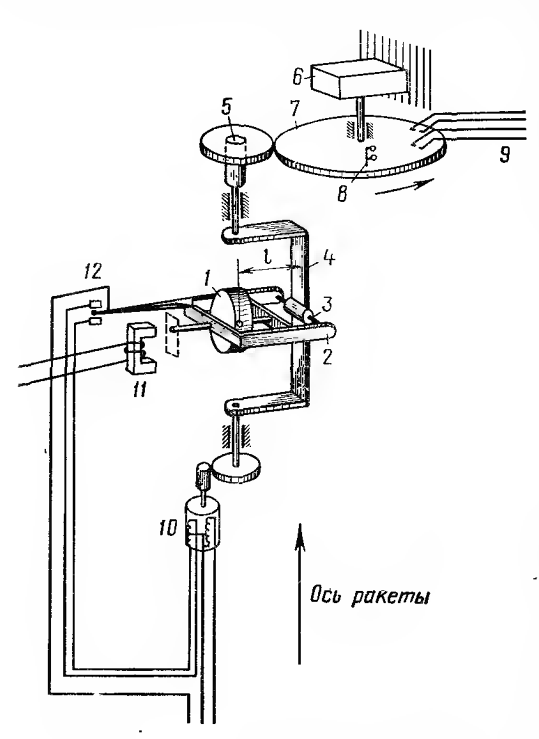


Рис. 5.8. Гироскопический интегратор продольных ускорений

$$\alpha_р = K \int_0^t (dV/d\tau + g \sin \vartheta)\, d\tau = KV + Kg \int_0^t \sin \vartheta d\tau. \quad (5.37)$$

При помощи зубчатой передачи угол $\alpha_р$ преобразуется в угол $\alpha_д$ поворота диска *7*, несущего кулачки *8*. До старта ракеты с помощью установочного механизма *6* эти кулачки отводятся от контактов *9* на угол $\alpha_{д\,0}$, определяемый требуемой дальностью полета. Замыкание контактов *9*, ведущее к выключению ракетного двигателя, происходит при повороте диска *7* на угол $\alpha_{д\,0}$, что согласно формуле (5.37) возможно лишь при достижении скоростью ракеты V требуемого значения. Действительно, программное изменение угла тангажа ϑ — известная функция времени $\vartheta_0(t)$. Поэтому влияние ускорения силы тяжести, выражаемое вторым членом формулы (5.37), можно учесть заранее в установочном угле $\alpha_{д\,0}$. Вся правая часть уравнения (5.37) соответствует кажущейся скорости, используемой в системе РКС (см. § 5.1).

Двигатель стабилизации *10* включается контактным устройством *12* при нарушении перпендикулярности между осью вращения ротора и осью *5* наружной рамки. Развиваемый им момент вызывает прецессию гироскопа вокруг оси *3* в направлении восстановления этой перпендикулярности. Если бы двигатель *10* отсутствовал, то при програм-

мном развороте ракеты происходило бы складывание рамок *2*, *4*, что нарушало бы пропорциональность между скоростью прецессии вокруг оси *5* и продольным ускорением ракеты. В схему прибора входит арретир *11*, освобождающий рамку *2* в момент старта ракеты.

На точность стрельбы влияет не только величина и угловое положение вектора скорости ЦТ баллистической ракеты в конце активного участка траектории. Точность зависит также от координат ЦТ в стартовой системе в момент выключения ракетного двигателя. Система управления ракеты ФАУ-2 обеспечивала регулирование лишь одной из трех координат ЦТ, а именно, сводила к нулю линейное отклонение ЦТ от плоскости стрельбы (регулирование по боковому отклонению). Систему регулирования по боковому отклонению предполагалось осуществить в автономном и неавтономном вариантах.

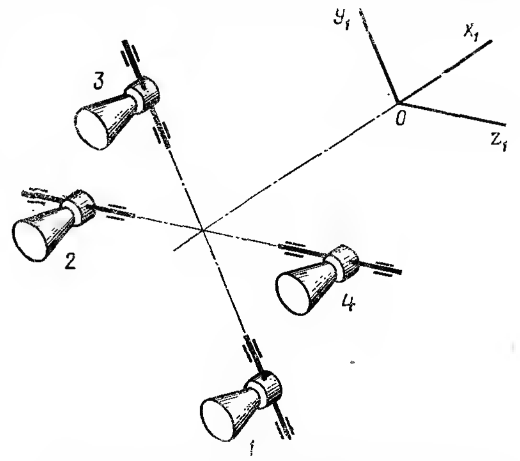


Рис. 5.9. Поворотные камеры ракетных двигателей в качестве исполнительных органов

В автономном варианте линейное отклонение ЦТ от плоскости стрельбы предполагалось определять путем двойного интегрирования выходного сигнала акселерометра, ось чувствительности которого перпендикулярна плоскости стрельбы (акселерометр должен был устанавливаться на трехосной гиростабилизированной платформе).

В неавтономном варианте линейное отклонение ЦТ от плоскости стрельбы определялось по сигналу от бортового радиолокационного приемника (с помощью радиолокационных станций создавалась равносигнальная плоскость, совпадающая с плоскостью стрельбы). Сигнал с приемника вызывал синхронное отклонение вертикальных рулей *1*, *1'* и *3*, *3'* (см. рис. 5.2), что возвращало ракету в плоскость стрельбы.

Система управления ракеты «Минитмен». Системы управления современных баллистических ракет значительно более совершенны. На смену воздушным и газовым рулям пришли поворотные камеры ракетных двигателей (рис. 5.9). Каждая из камер приводится в движение своим сервоприводом. Синхронное отклонение камер *1*, *3* обеспечивает стабилизацию по углу рыскания ψ, а синхронное отклонение камер *2*, *4* — стабилизацию и управление по углу тангажа ϑ. Стабилизация ракеты по углу крена осуществляется отклонением камер какой-либо пары или обоих пар ракетных двигателей в разные стороны.

Помимо поворотных камер с одной степенью свободы в некоторых ракетах, применяются также камеры, имеющие две степени свободы, что расширяет возможности управления вектором тяги. Это дости-

гается установкой ракетного двигателя в двухстепенный карданов подвес.

В качестве сервопривода камеры применяют гидравлическую рулевую машину с двухступенчатым усилением управляющего сигнала.

На рис. 5.10 показана функциональная схема системы управления баллистической ракеты «Минитмен». Важную роль в этой системе выполняет бортовая цифровая вычислительная машина (БЦВМ). Регулирование вокруг осей рыскания и тангажа осуществляется как по отклонению, так и по первой производной отклонения. Приращения $\Delta\vartheta$, $\Delta\psi$, $\Delta\gamma$ углов Эйлера ракеты *2* за период дискретности БЦВМ измеряются гиростабилизированной платформой *4*, а приращения угловых скоростей $\Delta\dot{\vartheta}$, $\Delta\dot{\psi}$ определяются по данным, поступающим от двух установленных на борту ракеты угловых акселерометров *3*. По сигналам от трех линейных акселерометров, находящихся на трехосной гиростабилизированной платформе, определяются приращения ΔV_{x1}, ΔV_{y1}, ΔV_{z1} составляющих линейной скорости ракеты.

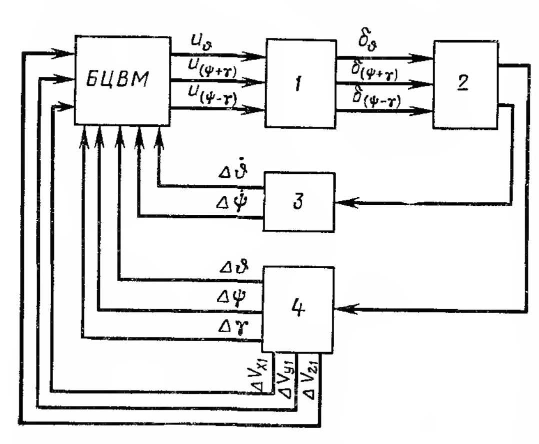


Рис. 5.10. Функциональная схема системы управления

На основании указанных на рис. 5.10 данных БЦВМ вырабатывает отклонения всех координат ракеты от их программных значений. Эти отклонения подаются на сервоприводы *1*, регулирующие вектор тяги ракеты. Возникающее при этом изменение параметров движения ракеты направлено в сторону ликвидации отклонений. Таким образом, роль сравнивающего устройства по всем координатам в данной системе управления выполняет инерциальная система навигации, сформированная указанными элементами при использовании трехосной гиростабилизированной платформы (см. § 4.7).

§ 5.6. ВЫРАЖЕНИЕ МАТРИЦАНТА СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕРЕЗ МАТРИЦАНТЫ ПОДСИСТЕМ

Большая сложность многоканальных систем автоматического управления делает актуальной задачу декомпозиции системы, т. е. задачу разложения сложной системы на несколько простых систем.

Возможность такой декомпозиции иногда может быть обоснована с помощью рассматриваемого ниже метода вычисления матрицанта сложной системы. Этот метод можно использовать также для приб-

лиженного интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Матрицант линейной нестационарной системы. Систему линейных дифференциальных уравнений

$$dx_1/dt = a_{11}(t)\, x_1 + \ldots + a_{1n} x_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dx_n/dt = a_{n1}(t)\, x_1 + \ldots + a_{nn}(t)\, x_n,$$

где $a_{ij}(t)$ — ограниченные интегрируемые функции, можно записать в следующей матричной форме:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}(t)\, a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}(t) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_{nn}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0,$$

а при более компактной записи

$$d\mathbf{x}/dt - \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} = 0. \tag{5.38}$$

Принятые в (5.38) обозначения ясны из сравнения с предыдущим матричным уравнением.

Будем искать решение уравнения (5.38) итерационным методом Пикара, полагая, что при $t = 0$ $\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)$. Согласно этому методу последовательные приближения $\mathbf{x}_{k-1}$ и $\mathbf{x}_k$ связаны уравнением

$$d\mathbf{x}_k/dt - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} = 0. \tag{5.39}$$

Потребовав $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}(0)$ (как это предусматривают начальные условия), из (5.39) находим

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}(\tau)\,\mathbf{x}_{k-1}\,d\tau. \tag{5.40}$$

Согласно рекуррентному соотношению (5.40) можно теперь записать:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0); \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(0) + \left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\,d\tau\right)\mathbf{x}(0);$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(0) + \left(\int_0^t \mathbf{A}\,d\tau\right)\mathbf{x}(0) + \left(\int_0^t \mathbf{A}\,d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}\,d\tau_2\right)\mathbf{x}(0); \ldots$$

Нетрудно видеть, что приближение $\mathbf{x}_k$ состоит из первых $k+1$ членов ряда

$$\left(\mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{A}\,d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{A}\,d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}\,d\tau_2 + \ldots\right)\mathbf{x}(0), \tag{5.41}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Чтобы ряд (5.41) действительно был решением уравнения (5.38), он должен сходиться равномерно.

Пусть $\{n, n\}$ — матрица из n строк и из n столбцов, все элементы которой равны единице. Учитывая ограниченность элементов матрицы $\mathbf{A}(t)$, можно подобрать такое действительное число M, что в исследуемом интервале соблюдается неравенство $\mathbf{A}(t) \leqslant M\{n, n\}$, означающее, что все элементы матрицы $\mathbf{A}$ меньше (или равны), чем M. Тогда каждый член ряда (5.41) мажорируется членами ряда $\mathbf{I} + \left[\frac{Mt}{1!} + \frac{M^2t^2}{2!} + \ldots\right]\{n, n\}$.

Поскольку мажорирующий ряд сходится (он представляет разложение функции e^{Mt}), то исследуемый ряд (5.41) сходится равномерно, т. е. при всех значениях $\mathbf{A}(t)$.

Теперь можно решение записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{A}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{A}(\tau_1)\,d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\,d\tau_2 + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \mathbf{A}(\tau_1)\,d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\,d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \mathbf{A}(\tau_3)\,d\tau_3 + \ldots\right] \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\Omega}_0^t(\mathbf{A})\,\mathbf{x}(0). \quad (5.42)$$

Матричный ряд $\Omega_0^t(\mathbf{A})$ называется *матрицантом* системы, имеющей матрицу $\mathbf{A}(t)$. Каждый столбец матрицы $\boldsymbol{\Omega}_0^t(\mathbf{A})$ является решением системы (5.38), а совокупность этих столбцов образует систему линейно независимых решений (фундаментальная или базисная система решений). Таким образом, матрицант $\boldsymbol{\Omega}_0^t(\mathbf{A})$ можно рассматривать как фундаментальную матрицу решений (матрица Вронского).

В особом случае, когда матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\,d\tau$ коммутативны (этот случай прежде всего имеет место для матрицы с постоянными элементами), матричный ряд (5.42) суммируется, так что матрицант можно представить в виде

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\,d\tau}. \quad (5.43)$$

Действительно

$$\int_0^t \mathbf{A}(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1 = \int_0^t \underbrace{\int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\,d\tau_2}_{u}\, \underbrace{\mathbf{A}(\tau_1)\,d\tau_1}_{du} =$$
$$= \frac{\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\,d\tau\right)^2}{2!};$$

$$\int_0^t \mathbf{A}(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{A}(\tau_3)\,d\tau_3\,d\tau_2\,d\tau_1 =$$
$$= \int_0^t \frac{\left(\int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau)\,d\tau\right)^2}{2!} \mathbf{A}(\tau_1)\,d\tau_1 = \frac{\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\,d\tau\right)^3}{3!};$$

Подставляя эти члены в (5.42) и производя суммирование, приходим к формуле (5.43). Заметим, что в § 4.7 решение (4.40) было получено с помощью матриканта (5.43).

Бесконечный функциональный ряд (5.42), через который выражается матрицант, в общем случае сходится медленно и, кроме того, его образование сопряжено с большими выкладками, так как помимо последовательного интегрирования приходится многократно перемножать матрицы высокого порядка. Встречающиеся на практике системы часто представляют собой две более простые подсистемы, имеющие между собой перекрестные связи. Вполне естественно рассмотреть сначала эти простые подсистемы по отдельности, а затем, основываясь на полученных результатах, перейти к исследованию всей системы в целом. Помимо упрощения расчета такой подход позволяет устанавливать специфические особенности системы и открывает возможность физической трактовки получающихся результатов. Ниже рассматривается способ образования матриканта, основанный именно на таком подходе.

Интегрирование линейных уравнений методом последовательных приближений. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами можно интегрировать, пользуясь методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения не обязательно брать начальные значения, как это делалось при построении матриканта. Можно в качестве нулевого приближения принять, например, решение исходной системы, получающееся при отбрасывании некоторых членов этой системы. Важно лишь, чтобы нулевое решение было в виде явной функции времени.

В дальнейшем будем придерживаться именно этого подхода. При членах исходного уравнения, неучитываемых при нахождении нулевого решения, введем в качестве множителя параметр ε. Будем решение исходного уравнения (5.38) искать в форме функционального ряда по степеням параметра ε:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2 + \ldots, \tag{5.44}$$

где $\mathbf{x}_0$—нулевое приближение; $\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1$—первое приближение и т. д.

Начальные значения $\mathbf{x}(0)$ будем учитывать в нулевом приближении, т. е. будем принимать

$$\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}(0), \quad \mathbf{x}_1(0) = 0, \quad \mathbf{x}_2(0) = 0, \ldots . \tag{5.45}$$

Подставляя ряд (5.44) в уравнение (5.38), в котором $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{B}$, и приравнивая коэффициенты левой и правой частей при одинаковых степенях ε, получим следующую систему уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 = 0; \tag{5.46а}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}\mathbf{x}_0; \tag{5.46б}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_2 = \mathbf{B}\mathbf{x}_1; \tag{5.46в}$$

$$\vdots$$

Эта система представляет собой рекурсивную цепочку неоднородных дифференциальных уравнений с одинаковыми левыми частями,

допускающими возможность интегрирования в квадратурах. Правые части уравнений определяются по предыдущим приближениям.

Последовательно интегрируя уравнения (5.46) при начальных условиях (5.45) (первое уравнение интегрируется в квадратурах и дает нулевое приближение, во втором и последующих уравнениях члены $\mathbf{Bx}_i$ являются известными функциями времени и воспринимаются как возмущающие воздействия), находим выражения членов ряда (5.44). Для получения решения необходимо в этом ряде положить $\varepsilon = 1$, так как в действительности при отделяемом (т. е. неучитываемом в нулевом приближении) члене $\varepsilon\mathbf{Bx}$ исходного уравнения множителя ε, отличного от единицы, не существует.

Известно, что решение неоднородного матричного уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ определяется формулой

$$\mathbf{x}(t) = \Omega_0^t(\mathbf{A})\mathbf{x}(0) + \Omega_0^t(\mathbf{A})\int_0^t [\Omega_0^\tau(\mathbf{A})]^{-1}\mathbf{f}(\tau)\,d\tau, \tag{5.47а}$$

где $\Omega_0^t(\mathbf{A})$ — матрицант (фундаментальная матрица решений) однородной системы.

Находя по этой формуле при учете начальных условий (5.45) решения уравнений (5.46 б, в, г ...) и подставляя эти решения и $\varepsilon = 1$ в (5.44), получаем решение системы (5.38) в виде следующего ряда:

$$\mathbf{x}(t) = \Omega_0^t(\mathbf{A}_0)\Big\{\mathbf{I} + \int_0^t [\Omega_0^\tau(\mathbf{A}_0)]^{-1}\mathbf{B}\Omega_0^\tau(\mathbf{A}_0)\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t [\Omega_0^{\tau_1}(\mathbf{A}_0)]^{-1}\mathbf{B}\Omega_0^{\tau_1}(\mathbf{A}_0)\int_0^{\tau_1}[\Omega_0^{\tau_2}(\mathbf{A}_0)]^{-1}\times$$
$$\times \mathbf{B}\Omega_0^{\tau_2}(\mathbf{A})\,d\tau_2\,d\tau_1 + \ldots\Big\}\mathbf{x}(0). \tag{5.47б}$$

Обозначая через M верхнюю грань матрицы $[\Omega_0^\tau(\mathbf{A}_0)]^{-1}\mathbf{B}\Omega_0^\tau \times (\mathbf{A}_0)$, приходим, как и при рассмотрении матрицанта, к выводу о равномерной сходимости ряда (5.47б). Сумма этого ряда представляет точное решение исходной системы (5.38).

Выражение матрицанта сложной системы через матрицанты подсистем. Разделим матрицу $\mathbf{A}$ на субматрицы, как показано в (5.48) штриховыми линиями,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & & & \ldots & \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{k1} & \ldots & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \ldots & \ldots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} & \mathbf{b} \end{bmatrix}. \tag{5.48}$$

Здесь $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — квадратные матрицы, а матрицы ξ и η могут иметь различное число строк и столбцов. В случае двухканальной системы автоматического управления субматрицы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ соответствуют основным каналам, а ξ, η — перекрестным связям между каналами.

Систему уравнений с матрицей (5.48) представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}, \tag{5.49}$$

где $\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \mathbf{b} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ \xi & 0 \end{bmatrix}$.

Используя уравнение (5.47 б), можно показать, что при субматрицах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ξ, η с элементами общего вида матрицант системы (5.49)

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Omega_0^t(\mathbf{a}) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{r}_{2n} & \Omega_0^t(\mathbf{a}) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}_{2n+1} \\ \Omega_0^t(\mathbf{b}) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_{2n+1} & \Omega_0^t(\mathbf{b}) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_{2n} \end{bmatrix}. \tag{5.50а}$$

Здесь

$$\mathbf{r}_{2n} = \int\limits_0^t \varkappa d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \sigma\, d\tau_2 \int\limits_0^{\tau_2} \ldots \int\limits_0^{\tau_{2n-1}} \sigma\, d_{2n},$$

$$\mathbf{s}_{2n+1} = \int\limits_0^t \varkappa\, d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \sigma\, d\tau_2 \int\limits_0^{\tau_2} \ldots \int\limits_0^{\tau_{2n}} \varkappa\, d\tau_{2n+1}, \tag{5.50б}$$

$$\mathbf{v}_{2n} = \int\limits_0^t \sigma\, d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \varkappa\, d\tau_2 \int\limits_0^{\tau_2} \ldots \int\limits_0^{\tau_{2n-1}} \varkappa\, d\tau_{2n},\ \mathbf{u}_{2n+1} = \int\limits_0^t \sigma\, d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \varkappa\, d\tau_2 \int\limits_0^{\tau_2} \ldots \int\limits_0^{\tau_{2n}} \sigma\, d\tau_{2n+1},$$

где

$$\varkappa = [\Omega_0^t(\mathbf{a})]^{-1} \eta \Omega_0^t(\mathbf{b}); \quad \sigma = [\Omega_0^t(\mathbf{b})]^{-1} \xi \Omega_0^t(\mathbf{a}). \tag{5.50в}$$

При $n = 0$ принимается $\mathbf{r}_{2n} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{v}_{2n} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{I}$.

При образовании матриканта для сложной матрицы (5.48) сначала образуем не зависящие друг от друга матриканты $\Omega_0^t(\mathbf{a})$ и $\Omega_0^t(\mathbf{b})$ подсистем $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, после чего за счет «связи» через матрицы ξ и η приходим к матриканту $\Omega_0^t(\mathbf{A})$. Разделение матрицы $\mathbf{A}$ при соблюдении условия, что субматрицы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ квадратные, можно осуществить в нескольких вариантах. Однако практически это разделение целесообразно производить с учетом физической сущности рассматриваемой задачи, например, соответственно каналам двухканальной системы.

Разложение (5.50) имеет преимущество, по меньшей мере, в следующих двух случаях:

1. Пусть $|\xi| \ll |\mathbf{a}|$ и $|\eta| \ll |\mathbf{b}|$, т. е. связь между подсистемами слаба*. Тогда ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{r}_{2n}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}_{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_{2n+1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_{2n}$ можно оборвать уже после двух членов. Малое отличие суммы рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{r}_{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_{2n}$ от единичной матрицы, а суммы рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}_{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_{2n+1}$ от нуля может служить основанием для декомпозиции двухканальной системы на отдельные каналы.

2. Практический расчет матрицанта $\Omega_0^t(\mathbf{A})$ труден — можно исходить лишь из определяющего уравнения (5.42). Но матрицу $\mathbf{A}$ можно разделить таким образом, что образование матрицантов $\Omega_0^t(\mathbf{a})$, $\Omega_0^t(\mathbf{b})$ вследствие свойств матриц $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ оказывается весьма легким.

Пример. Проиллюстрируем применение формул (5.50) на примере системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, матрица которой имеет вид

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -h & k\sin\omega t \\ k\sin\omega t & -h \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{A}(t)$ коммутативна с матрицей $\int \mathbf{A}(t)\,dt$, что указывает на возможность решения соответствующего уравнения в квадратурах. Получим это решение, используя формулы (5.50):

$$\Omega_0^t(a) = \Omega_0^t(b) = \Omega_0^t(-h) = e^{-ht},$$

$$\varkappa = \sigma = e^{-ht}\, k\sin\omega t\, e^{ht} = k\sin\omega t.$$

Производя при $n = 0, 1, 2, \ldots$ вычисления по формулам (5.50б), находим

$\underline{n=0}$

$$r_0 = v_0 = 1;$$

$$s_1 = u_1 = \int_0^t k\sin\omega\tau_1\, d\tau_1 = \frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t);$$

$\underline{n=1}$

$$r_2 = v_2 = \int_0^t k\sin\omega\tau_1\, d\tau_1 \int_0^{\tau_1} k\sin\omega\tau_2\, d\tau_2 =$$

$$= \frac{k^2}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau_1(1-\cos\omega\tau_1)\, d\tau_1 = \frac{k^2}{\omega^2}\,\frac{1}{2}(1-\cos\omega\tau_1)^2\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^2$$

$$s_3 = u_3 = \int_0^t k\sin\omega\tau_1\, d\tau_1 \int_0^{\tau_1} k\sin\omega\tau_2\, d\tau_2 \int_0^{\tau_2} k\sin\omega\tau_3\, d\tau_3 =$$

$$= \frac{1}{2!}\,\frac{k^3}{\omega^2}\int_0^t \sin\omega\tau_1(1-\cos\omega\tau_1)^2\, d\tau_1 = \frac{1}{3!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^3;$$

* Здесь $|\xi|$ — матрица, получаемая из матрицы ξ заменой элементов их абсолютными значениями. Неравенства относятся к максимальным по модулю элементам матриц.

$n=2$

$$r_4=v_4=\int_0^t k\sin\omega\tau_1\,d\tau_1\int_0^{\tau_1} k\sin\omega\tau_2\,d\tau_2\int_0^{\tau_2} k\sin\omega\tau_3\,d\tau_3\int_0^{\tau_3} k\sin\omega\tau_4\,d\tau_4=$$

$$=\frac{1}{3!}\,\frac{k^4}{\omega^3}\int_0^t\sin\omega\tau_1(1-\cos\omega\tau_1)^3\,d\tau_1=\frac{1}{4!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^4;$$

$$s_5=u_5=\frac{1}{5!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^5;$$

$$\vdots$$

Отсюда имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}r_{2n}=\left|\sum_{n=0}^{\infty}v_{2n}\right|=1+\frac{1}{2!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^2+\frac{1}{4!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^4+$$

$$+\frac{1}{6!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^6+\ldots=\operatorname{ch}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}+e^{-\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}\right];$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}s_{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{2n+1}=\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)+\frac{1}{3!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^3+$$

$$+\frac{1}{5!}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^5+\ldots=\operatorname{sh}\left[\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}-e^{-\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}\right].$$

При учете полученных выражений по формуле (5.50а) находим следующее выражение матриканта:

$$\Omega_0^t(A)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-ht}\left(e^{\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}+e^{-\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}\right), & \frac{1}{2}e^{-ht}\left(e^{\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}-e^{-\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}\right), \\ \frac{1}{2}e^{-ht}\left(e^{\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}-e^{-\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}\right), & \frac{1}{2}e^{-ht}\left(e^{\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}+e^{-\frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)}\right).\end{bmatrix}$$

§ 5.7. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ТРЕХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Показанная на рис. 5.6 многомерная (трехканальная) система при нулевых статических отклонениях по углам тангажа, рыскания и крена распадается на три независимых друг от друга канала. Однако декомпозиция (разложение) сложной системы на подсистемы воз-

можна и при отличных от нуля статических отклонениях. Ниже показано, что в отношении коэффициентов усиления перекрестных связей (они зависят от статических отклонений) трехканальная система управления является грубой, т. е. малое отклонение этих коэффициентов от нуля обусловливает лишь малое изменение процессов, протекающих в трехканальной системе.

Запишем уравнения (5.22), (5.23) трехканальной системы стабилизации в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Вводя новые переменные

$$x_1 = \dot{\psi},\ x_3 = \dot{\vartheta},\ x_5 = \dot{\gamma}, \tag{5.51 а}$$

и применяя для координат новые обозначения

$$x_2 = \psi,\ x_4 = \vartheta,\ x_6 = \gamma, \tag{5.51 б}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + f_1;\\ \dot{x}_2 &= x_1;\\ \dot{x}_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + f_3;\\ \dot{x}_4 &= x_3;\\ \dot{x}_5 &= a_{51} x_1 + a_{52} x_2 + a_{53} x_3 + a_{54} x_4 + a_{55} x_5 + a_{56} x_6 + f_5;\\ \dot{x}_6 &= x_5; \end{aligned}\right\} \tag{5.52}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1}{J}(D + C_2 a_1 \cos\gamma_0);\\ a_{12} &= -\frac{1}{J}(C_2 a_0 \pm C_1)\cos\gamma_0;\\ a_{13} &= C_2 a_1 \sin\gamma_0/J;\quad a_{14} = (C_2 a_0 \pm C_1)\sin\gamma_0/J;\\ a_{31} &= -C_2 a_1 \sin\gamma_0/J\cos\psi_0;\quad a_{32} = -(C_2 a_0 \pm C_1)\sin\gamma_0/J\cos\psi_0;\\ a_{33} &= -(D\cos\psi_0 + C_2 a_1\cos\gamma_0)/J\cos\psi_0;\\ a_{34} &= -(C_2 a_0 \pm C_1)\cos\gamma_0/J\cos\psi_0;\\ a_{51} &= -C_2 a_1 \operatorname{tg}\psi_0 \sin\gamma_0/J;\quad a_{52} = -(C_2 a_0 \pm C_1)\operatorname{tg}\psi_0\sin\gamma_0/J;\\ a_{53} &= -[(D - JD_x/J_x)\cos\psi_0 + C_2 a_1\cos\gamma_0]\operatorname{tg}\psi_0/J;\\ a_{54} &= -(C_2 a_0 \pm C_1)\operatorname{tg}\psi_0\cos\gamma_0/J;\\ a_{55} &= -(D_x + C_2' a_1')/J_x;\\ a_{56} &= -C_2' a_0'/J_x;\\ f_1 &= (m_y\cos\gamma_0 - m_z\sin\gamma_0)/J;\\ f_3 &= (m_y\sin\gamma_0 + m_z\cos\gamma_0)/J\cos\psi_0;\\ f_5 &= \operatorname{tg}\psi_0(m_y\sin\gamma_0 + m_z\cos\gamma_0)/J + m_x/J_x. \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

Координаты $x_1, \ldots, x_6$ называются *переменными состояния* исследуемой системы, а уравнения (5.52) — *уравнениями в переменных состояния.*

Разобьем матрицу **A** системы (5.52) вертикальной и горизонтальной штриховыми линиями на квадратные субматрицы **a**, **b** соответственно второго и четвертого порядков и прямоугольные матрицы связи $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ типа (2×4) и (4×2) соответственно:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \qquad (5.54)$$

(Над столбцами 1–2 строк 1–2 — a, над столбцами 3–6 строк 1–2 — η; под столбцами 1–2 строк 3–6 — ξ, под столбцами 3–4 строк 5–6 — ξ_1; блок строк и столбцов 3–6 — $\mathbf{b}$.)

Отличные от нуля элементы a_{ij} матриц связи $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ содержат в качестве множителя или $\sin\gamma_0$, или $\sin\gamma_0 \operatorname{tg}\psi_0$. Поэтому элементы матриц $\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\sigma}$, определяемых формулами (5.50в), элементы всех членов матричных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}_{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_{2n+1}$ и элементы всех членов, начиная со второго, рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{r}_{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_{2n}$ — см. (5.50 а, б) — также содержат $\sin\gamma_0$, $\operatorname{tg}\psi_0$ в качестве множителей.

Малая величина равновесных углов γ_0, ψ_0 означает, что все элементы матриканта $\Omega_0^t \mathbf{A}$, благодаря которым образуются матрицы связи $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$, также малы. Отсюда следует, что доминирующие члены фундаментального решения рассматриваемой системы образуются за счет элементов, входящих в матриканты Ω_0^t (a) и Ω_0^t (**b**) основных каналов. Это служит основанием для декомпозиции исходной системы с матрицей **A** на две независимые подсистемы с упоминавшимися выше матрицами **a**, **b**.

Разделяя в свою очередь матрицу **b** подсистемы четвертого порядка на субматрицы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\xi}_1$, как показано (штрихпунктирными линиями) в (5.54), и, учитывая, что отличные от нуля элементы a_{53}, a_{54} матрицы связи $\boldsymbol{\xi}_1$, содержат в качестве множителя $\operatorname{tg}\psi_0$, на основании аналогичных рассуждений приходим к выводу о возможности декомпозиции этой подсистемы при малых ψ_0 на две более простые подсистемы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ второго порядка.

Таким образом, при малой величине статических отклонений γ_0, ψ_0 по углу крена и рыскания замкнутая система (5.22), (5.23) шестого порядка разделяется на три независимые друг от друга подсистемы второго порядка. Матрицы этих подсистем расположены по главной диагонали матрицы (5.54).

§ 5.8. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НУЛЕВЫХ СТАТИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЯХ

При равновесных значениях координат, равных нулю (за исключением программных значений ϑ_0, θ_0, α_0, $\delta_{т0}$), линеаризованные уравнения (5.20)* баллистической ракеты и уравнения (5.23) системы стабилизации распадаются на следующие замкнутые подсистемы.

Подсистема, описывающая движение по крену:

$$J_x\ddot{\gamma}+D_x\dot{\gamma}=-C_2'\delta_к+m_x;\quad \delta_к=a_0'\gamma+a_1'\dot{\gamma}. \tag{5.55}$$

Подсистема, описывающая движение по рысканию:

$$m_0V\dot{\Psi}=(C_з'+T)\beta+m_0g\sin\theta_0\,\Psi-(Y_0+T\sin\alpha_0)\gamma_c; \tag{5.56а}$$

$$J\ddot{\psi}=\mp C_1\beta-D\dot{\psi}-C_2\delta_р+m_y; \tag{5.56б}$$

$$\Psi=(\psi-\beta)\cos\alpha_0+\gamma\sin\gamma_0; \tag{5.56в}$$

$$\gamma_c=\sin\theta_0[(\psi-\beta)\cos\vartheta_0+\gamma\sin\vartheta_0]-$$
$$-\cos\theta_0[(\psi-\beta)\sin\vartheta_0-\gamma\cos\vartheta_0]; \tag{5.56г}$$

$$\delta_р=a_0\psi+a_1\dot{\psi}. \tag{5.56д}$$

Подсистема, описывающая движение по тангажу:

$$m_0V\dot{\theta}=(C_з'+T)\alpha+m_0g\sin\theta_0\cdot\theta; \tag{5.57а}$$

$$J\ddot{\vartheta}=\mp C_1\alpha-D\dot{\vartheta}-C_2\delta_т+m_z; \tag{5.57б}$$

$$\theta=\frac{\cos^2\theta_0}{(\sin\vartheta_0\sin\alpha_0+\cos\vartheta_0\cos\alpha_0)^2}(\vartheta-\alpha); \tag{5.57в}$$

$$\delta_т=a_0\vartheta+a_1\dot{\vartheta}. \tag{5.57г}$$

В этих уравнениях

$$C_з'=\left.\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right|_{\alpha_0=0}=-\left.\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right|_{\beta_0=0}.$$

Учитывая малую величину балансировочного угла атаки ($\alpha_0\approx\approx 0$), можно положить $\vartheta_0=\theta_0$. Тогда уравнения (5.56 в, г) и (5.57 в) примут соответственно вид

$$\Psi=\psi-\beta;\qquad \gamma_c=\gamma \tag{5.58}$$

и

$$\theta=\vartheta-\alpha. \tag{5.59}$$

При исследовании устойчивости можно подсистемы (5.55) ÷ (5.57) рассматривать как независимые друг от друга: воздействие

$$-(Y_0+T\sin\alpha_0)\gamma_c\approx-Y_0\gamma \tag{5.60}$$

* См. также (5.16), м ÷ 0.

на канал рыскания со стороны канала крена выполняет лишь роль внешнего возмущения (ввиду отсутствия воздействия канала рыскания на канал крена какого-либо замкнутого контура за счет связи $-Y_0\gamma$ не образуется).

Нетрудно видеть, что при горизонтальном полете без крена ($\theta_0 = 0$, $\gamma = 0$) уравнения (5.56) совпадают с уравнениями (1.7), (1.8), (1.9), непосредственно составленными в этих предположениях (отсутствие в первом уравнении (5.56) члена $C_4\delta$ объясняется просто тем, что при составлении этого уравнения подъемная сила руля не учитывалась).

§ 5.9. УРАВНЕНИЯ И СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС

Как уже отмечалось, современные системы автоматического управления управляют не только угловым положением баллистической ракеты, но и положением ее центра масс. Перепишем уравнения движения ракеты в форме, удобной при исследованиях в этом случае [22].

Угол поворота траектории Ψ, фигурирующий в уравнениях движения рыскания (5.56), выразим через проекцию V_{z_0} скорости ракеты на поперечную ось z_0 стартовой системы. Как видно из рис. 5.3, при $\dot{\Psi} > 0$ линейная скорость конца вектора V, равная $V\dot{\Psi}$, совпадает с отрицательным направлением отсчета по оси z^*. Ее проекция на ось z_0 стартовой системы, равная ускорению центра масс вдоль этой оси, определяется формулой

$$\dot{V}_{z0} = -V\dot{\Psi}\cos\Psi. \qquad (5.61)$$

Производя при учете $\Psi_0 = 0$ варьирование, находим, что $\dot{v}_{z_0} = -V\dot{\Psi}$ или после интегрирования (принимается $V = \mathrm{const}$)

$$\Psi = -v_{z0}/V. \qquad (5.62)$$

Подставляя найденное выражение в (5.56) и учитывая (5.58), окончательно получим:

$$m_0\dot{v}_{z_0} + C_3^* v_{z_0} + C_3\psi = F_{z_0}; \qquad (5.63а)$$

$$J\ddot{\psi} + D\dot{\psi} \pm C_1\psi = \mp C_1 v_{z_0}/V - C_2\delta_р + m_y; \qquad (5.63б)$$

$$\delta_р = a_0\psi + a_1\dot{\psi} - b_0\int v_{z_0}dt - b_1 v_{z_0}, \qquad (5.63в)$$

где $C_3^* = (C_3' + T - gm_0\sin\theta_0)/V$; $C_3 = C_3' + T$; F_{z_0} — внешние возмущения.

В уравнении (5.63в), описывающем автомат стабилизации, учтены члены, за счет которых обеспечивается удержание (стабилизация) центра масс в плоскости стрельбы. Член $b_0\int v_{z_0}\,dt$ пропорционален отклонению z_0 центра масс от плоскости стрельбы, а член $b_1 v_{z_0}$ — производной $\dot{z}_0$ от отклонения. Оба эти члена вырабатываются инерциальной системой навигации путем интегрирования выходного сигнала

акселерометра, ось чувствительности которого направлена по оси z_0 стартовой системы (акселерометры устанавливаются на трехосной гиростабилизированной платформе, воспроизводящей на борту направления осей стартовой системы). Знак минус перед указанными членами учитывает смысл регулирования (чтобы при положительном отклонении z_0 центр масс возвращался в плоскость стрельбы, руль должен быть отклонен в направлении отрицательного отсчета δ_p — рис. 5.11, *а*).

Для составления структурной схемы системы «ракета — автомат стабилизации» необходимо сначала по уравнениям (5.63 а, б) найти

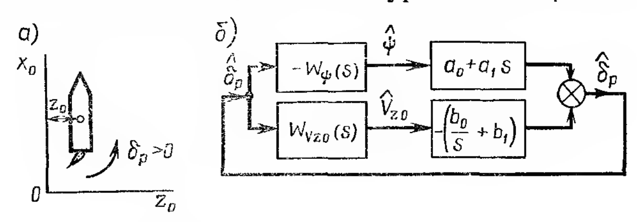


Рис. 5.11. Система «ракета — автопилот с каналом стабилизации центра масс»

передаточные функции ракеты $\frac{\hat{\psi}}{\hat{\delta}_p}$ и $\frac{\hat{v}_{z_0}}{\hat{\delta}_p}$. Полагая для простоты внешние воздействия нулевыми, имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hat{\psi}}{\hat{\delta}_p} &= -\frac{C_2 (m_0 s + C_3^*)}{m_0 J s^3 + (J C_3^* + m_0 D) s^2 + (C_3^* D \pm m_0 C_1) s \mp \mp (C_1 C_3)/V \pm C_1 C_3^*} = -W_\psi(s); \\ \frac{\hat{v}_{z0}}{\hat{\delta}_p} &= \frac{C_2 C_3}{m_0 J s^3 + (J C_3^* + m_0 D) s^2 + (C_3^* D \pm m_0 C_1) s \mp \mp (C_1 C_3)/V \pm C_1 C_3^*} = W_{vz0}(s). \end{aligned}\right\} \quad (5.64а)$$

Структурная схема, составленная по этим передаточным функциям и уравнению (5.63в), показана на рис. 5.11, *б*.

Аналогичным образом, основываясь на уравнениях (5.57), можно получить структурную схему для продольного движения. При этом следует учитывать вытекающее из рис. 5.3 соотношение

$$\dot{V}_{y0} = V \cos \Psi \cos \theta \cdot \dot{\theta}. \quad (5.64б)$$

Вследствие малой величины программной скорости $\dot{\theta}_0$ будем при варьировании соотношения (5.64 б) считать $\dot{\theta}_0 = 0$. Учитывая $\Psi_0 = 0$ и по-прежнему полагая $V = \text{const}$, после варьирования и интегрирования получим $v_{y0} = V \cos \theta_0 \cdot \theta$, где θ_0 — программное значение угла траектории.

Аппаратурно сигнал рассогласования в продольном канале стабилизации центра масс формируется в данном случае следующим образом. Выходной сигнал акселерометра, ось чувствительности которого направлена по оси y_0, два раза интегрируется и из результата пер-

вого и второго интегрирования вычитаются соответственно сигналы $\dot{y}_{0\,пр}$, $y_{0\,пр}$, предварительно вычисленные по параметрам программной траектории. Образующиеся разности после умножения на b_1 и b_2 соответствуют последним двум членам в законе регулирования вида (5.63 в).

Структурная схема всей системы имеет такой же вид, как на рис. 5.11, *б*. Отличие заключается лишь в знаках перед передаточными функциями и в более сильной зависимости коэффициентов функций $W_v(s)$, $W_{vy0}(s)$ от программного значения θ_0 угла траектории.

§ 5.10. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАКЕТЫ ПРИ УЧЕТЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Одной из главных задач при проектировании ракеты является обеспечение максимального прироста скорости полета, т. е. максимального значения отношения массы топлива к стартовой массе. Это заставляет конструктора обращать особое внимание на облегчение конструкции. Но облегчение конструкции ракеты сопряжено с уменьшением ее жесткости.

Гироскопы реагируют на возникающие в полете угловые упругие деформации ракеты так же, как и на угловые колебания корпуса как жесткого тела. Вследствие этого возникает связь между упругими колебаниями корпуса и работой системы автоматической стабилизации ракеты. Кроме того, упругие деформации ракеты обусловливают дополнительные аэродинамические нагрузки, которые в свою очередь вызывают дополнительные упругие деформации и т. д. (явление флаттера). Все это указывает на необходимость учета в математической модели ракеты изгибных колебаний ее продольной оси (упругой линии).

Уравнение поперечных колебаний упругого стержня. Будем рассматривать поперечные колебания упругого стержня. Неподвижную систему отсчета lq выберем таким образом, чтобы в начальный момент начало координат совпадало с концом стержня, а ось абсцисс l была направлена вдоль оси недеформированного стержня (рис. 5.12). Предположим, что на стержень действует изменяющаяся во времени распределения нагрузка с интенсивностью $F_q(l, t)$.

Полный прогиб стержня $q(l, t)$ складывается из прогиба $\alpha(l, t)$, обусловливаемого деформацией изгиба, и прогиба $\beta(l, t)$, вызываемого деформацией сдвига:

$$q(l, t) = \alpha(l, t) + \beta(l, t). \tag{5.65}$$

На рис. 5.13 изображена система сил, действующих на элемент стержня длиной dl. Здесь $m(l)$, $\mu(l)$ — соответственно плотность распределения массы и момента инерции массы относительно нейтрального волокна вдоль длины стержня; $m(l)\ddot{q}(l, t)\,dl$ — действующая на элемент dl инерционная сила*, возникающая при положительном ускорении $\ddot{q}(l, t)$; $\mu(l)\ddot{\alpha}'(l, t)\,dl$ — действующий на элемент dl

* Точка означает дифференцирование по времени t, а штрих — дифференцирование по координате l.

стержня инерционный момент, возникающий при положительном ускорении изменения угла поворота α' касательной к упругой линии; Q, M — перерезывающая сила и момент в левом, а $Q + \frac{\partial Q}{\partial l} dl$, $M + \frac{\partial M}{\partial l} dl$ — в правом сечениях, ограничивающих элемент стержня dl.

Приравнивая нулю согласно принципу Даламбера сумму вертикальных сил, действующих на элемент dl, имеем

$$F_q(l, t)\,dl + \frac{\partial Q}{\partial l} dl - m(l)\,dl \cdot \ddot{q}(l, t) = 0, \tag{5.66}$$

после сокращения на dl

$$m\ddot{q} - \frac{\partial Q}{\partial l} = F_q. \tag{5.67}$$

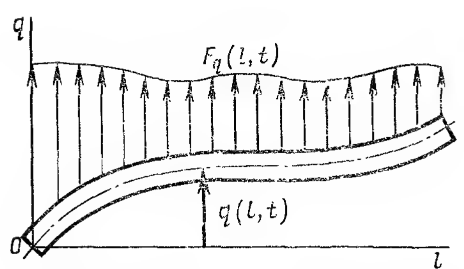


Рис. 5.12. Упругий стержень под действием динамической поперечной нагрузки

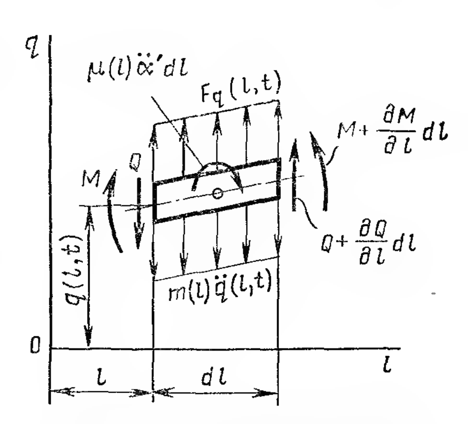


Рис. 5.13. Силы и моменты, действующие на элемент стержня

Точно так же, приравнивая нулю сумму моментов, действующих на выделенный элемент вокруг его центра тяжести, получим

$$\frac{\partial M}{\partial l} dl + Q dl + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial l} dl\right) dl - \mu(l)\,\ddot{\alpha}'\,dl = 0.$$

Пренебрегая третьим членом, содержащим бесконечно малую второго порядка, окончательно имеем

$$\frac{\partial M}{\partial l} + Q = \mu\ddot{\alpha}'. \tag{5.68}$$

Соотношения между изгибающим моментом и прогибом от деформации изгиба и перерезывающей силой и прогибом за счет сдвига имеют соответственно вид:

$$EI\alpha'' = M, \tag{5.69}$$

$$GK\beta' = Q, \tag{5.70}$$

где EI и GK — жесткость стержня соответственно на изгиб и сдвиг.

Исключая из (5.67) ÷ (5.70) M и Q, получим:

$$m\ddot{q} + (EI\alpha'')'' - (\mu\ddot{\alpha}')' = F_q; \tag{5.71}$$

$$\beta' = [\mu\ddot{\alpha}' - (EI\alpha'')']/GK. \tag{5.72}$$

Действительно, продифференцировав уравнение (5.68) по l, находим $\partial Q/\partial l = (\mu\ddot{\alpha}')' - M''$.

Подставляя это выражение в (5.67) и учитывая, что согласно (5.69) $M'' = (EI\alpha'')''$, приходим к уравнению (5.71). Путем подстановки (5.70) в (5.68) при учете $M' = (EI\alpha'')'$ убеждаемся в справедливости уравнения (5.72).

Принимая во внимание, что поперечные размеры ракеты по сравнению с ее длиной малы, будем рассматривать ракету как тонкий упругий стержень, т. е. будем пренебрегать инерционным моментом $\mu\ddot{\alpha}'dl$, проистекающим от вращения элемента dl, и поперечными деформациями сдвига. Для этого случая уравнение поперечных колебаний стержня можно получить из уравнений (5.71), (5.72), положив $\mu = 0$, $G = 0$. Имеем:

$$(EIq'')'' + m\ddot{q} = F_q. \tag{5.73}$$

Собственные колебания упругого стержня. Исследуем сначала свободные колебания стержня, т. е. будем считать, что внешняя нагрузка отсутствует ($F_q = 0$). Линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных

$$(EIq'')'' + m\ddot{q} = 0 \tag{5.74}$$

допускает разделение переменных. Поэтому решение уравнения будем искать в виде

$$q(l, t) = f(l)\, p(t). \tag{5.75}$$

Подставляя это выражение в (5.74), находим

$$(EIf'')''/(mf) = -\ddot{p}/p. \tag{5.76}$$

Так как l и t представляют собой независимые переменные, отношение функций времени t, стоящее в правой части (5.76), может равняться отношению функций расстояния l в левой части только тогда, когда эти отношения постоянны, т. е. не зависят ни от t, ни от l. Вводя для этой постоянной обозначение ω^2, получим следующие связанные друг с другом лишь через параметр ω^2 обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0, \tag{5.77}$$

$$(EIf'')'' - m\omega^2 f = 0. \tag{5.78}$$

Принятая форма решения (5.75) показывает, что первое уравнение определяет закон колебаний во времени каждой точки упругой линии, а второе — распределение амплитуд колебаний вдоль этой линии.

Величина амплитуд определяется начальными условиями. Поскольку дифференциальное уравнение (5.77) с независимой переменной t имеет второй порядок, число начальных условий должно равняться двум. Уравнение (5.77) относится к каждой точке l стержня. Поэтому начальные условия задаются в виде распределения смещений q и скоростей смещения $\dot{q}$ по длине стержня в начальный момент $t = 0$:

$$q(l, 0) = w_1(l),\ \dot{q}(l, 0) = w_2(l). \tag{5.79}$$

Для получения решения уравнения (5.78) требуется в соответствии с порядком этого уравнения четыре граничных условия. Эти условия вытекают из характера закрепления стержня на обоих его концах. Находящаяся в полете ракета представляет собой стержень со свободными концами, откуда следует, что в концевых сечениях изгибающий момент M и перерезывающая сила Q равны нулю. Учитывая это, а также соотношение $M' = Q$ и уравнения (5.69), имеем следующие граничные условия:

$$f''(0) = 0 \quad (EIf'')'_{l=0} = 0, \tag{5.80 а}$$

$$f''(L) = 0 \quad (EIf'')'_{l=L} = 0, \tag{5.80 б}$$

где L — длина стержня.

Величины ω_i^2 и функции $f_i(l)$, удовлетворяющие при заданных граничных условиях уравнению (5.78), называются *собственными частотами* и *собственными формами* колебаний. Для каждого конкретного стержня при заданных граничных условиях существует бесконечное дискретное множество собственных частот ω_i и соответствующих им собственных форм $f_i(l)$ колебаний.

Рассмотрим для примера однородный стержень, т. е. стержень, для которого $EI = \text{const}$, $m = \text{const}$. В этом случае уравнение (5.78) представляет собой обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, и его решение можно записать в виде

$$f(l) = C\,\text{sh}\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,l + D\,\text{ch}\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,l + E\sin\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,l + F\cos\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,l, \tag{5.81}$$

где $a = \sqrt{EI/m}$.

Используя граничные условия (5.80а), из (5.81) находим

$$C - E = 0,\ D - F = 0. \tag{5.82}$$

Подстановка в это уравнение граничных условий (5.80б) приводит при учете (5.82) к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\text{sh}\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L - \sin\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L\right)C + \\ &+\left(\text{ch}\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L - \cos\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L\right)D = 0; \\ &\left(\text{ch}\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L - \cos\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L\right)C + \\ &+\left(\text{sh}\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L + \sin\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,L\right)D = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.83}$$

Чтобы решение относительно C и D было нетривиальным, определитель однородной системы (5.83) должен равняться нулю. Используя это условие, получим

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}}L\right) = 1/\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}}L\right). \tag{5.84}$$

Здесь свободным параметром является частота собственных колебаний ω. Решая трансцендентное уравнение (5.84), например, графическим способом (рис. 5.14), находим по переменной $\sqrt{\frac{\omega}{a}}L$ корни как точки пересечения кривых $\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}}L\right)$ и $\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}}L\right)}$. По этим корням легко найти собственные частоты ω_n стержня.

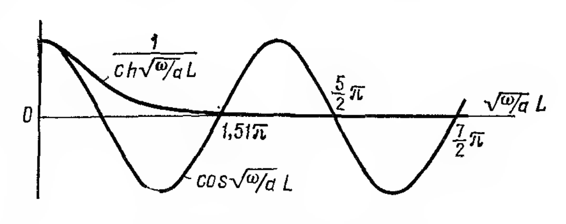


Рис. 5.14. Графическое решение трансцендентного уравнения (5.84)

Собственные формы, соответствующие упругим деформациям стержня, получим, выразив из уравнений (5.82), (5.83) коэффициенты C, E и F через постоянную D (что, как уже отмечалось, возможно только при $\omega = \omega_n$) и подставив результат в уравнение (5.81). Имеем

$$f_n(l) = D\left[\frac{\cos\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L - \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L - \sin\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l + \sin\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l\right) + \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l + \cos\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l\right], \tag{5.85}$$

где ω_n — собственные частоты стержня.

При определении собственных частот графическим способом одно из пересечений получается при $\sqrt{\frac{\omega}{a}}L = 0$, что указывает на наличие собственной частоты, равной нулю. Появление нулевой собственной частоты объясняется тем, что стержень не закреплен: этой частоте соответствует движение стержня как твердого тела.

Графики нескольких собственных форм тонкого однородного упругого стержня со свободными концами, построенные по уравнению (5.85), и соответствующие собственные частоты, найденные из уравнения (5.84), приведены на рис. 5.15.

Принимая во внимание вид решений уравнений (5.77) и (5.78), можно решение (5.75) однородного уравнения (5.74) записать в следующей форме:

$$q(l,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n \sin\omega_n t+B_n\cos\omega_n t)\left\{\frac{\cos\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L-\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L-\sin\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}L}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l+\sin\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l\right)+\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l+\cos\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l\right\}, \tag{5.86}$$

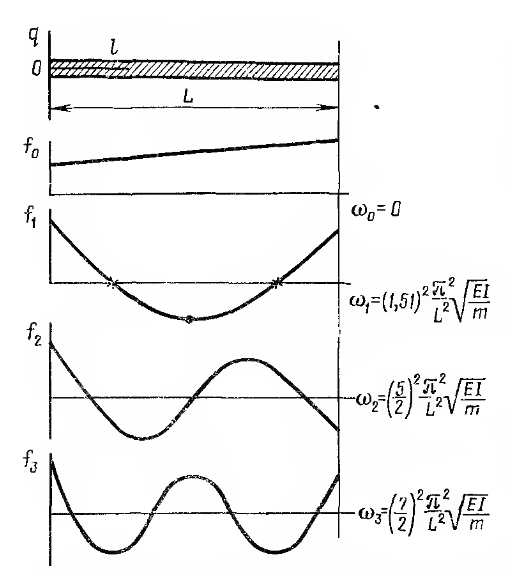


Рис. 5.15. Собственные формы однородного тонкого стержня со свободными концами

где постоянная D объединена с постоянными A_n, B_n. Используя начальные условия (5.79), можно определить постоянные интегрирования A_n, B_n:

$$\left.\begin{aligned} w_1(l)&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n f_n(l);\\ w_2(l)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n f_n(l). \end{aligned}\right\} \tag{5.87}$$

Решение этих уравнений в отношении A_n, B_n может быть получено с применением методов гармонического анализа.

Таким образом, собственные колебания стержня представляются бесконечным множеством гармоник, каждой из которых соответствует своя форма колебаний. Гармоники образуют стоячие волны. Это означает, что в процессе движения по некоторой форме колебаний (по некоторой гармонике) все точки стержня совершают гармонические колебания с одной и той же частотой ω_i; фаза колебаний точек с одинаковым по знаку смещением f_i также одинакова.

Неподвижные точки, в которых $f_i=0$, называют узлами стоячей волны. Точки, в которых отклонение достигает максимума (для однородного стержня они располагаются посередине между узлами), называют пучностями стоячей волны (рис. 5.15). Иногда формы колебаний называют тонами колебаний.

В заключение заметим, что свободные упругие колебания стержня с незакрепленными концами происходят под действием внутренних сил

и, следовательно, не оказывают влияния на положение центра масс стержня.

Ортогональность собственных форм. Можно доказать, что при граничных условиях (5.80) собственные формы f_i (l) образуют ортогональную систему функций с весом m (l), где m (l) — плотность распределения массы по длине стержня, т. е. при $i \neq j$

$$\int_0^L f_i(l) f_j(l) m(l)\, dl = 0. \tag{5.88}$$

Действительно, запишем уравнение (5.78) для i-й и j-й форм колебаний. Умножив первое уравнение на f_j, а второе — на f_i, и проинтегрировав каждое уравнение по длине стержня, получим

$$\int_0^L (EIf_i'')'' f_j\, dl = \omega_i^2 \int_0^L f_i f_j m dl, \tag{5.89}$$

$$\int_0^L (EIf_j'')'' f_i\, dl = \omega_j^2 \int_0^L f_i f_j m dl. \tag{5.90}$$

Вычитая из первого уравнения второе и производя интегрирование выражения справа от знака равенства по частям, находим

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L f_i f_j m dl = \{[f_j (EIf_i'')' - f_i (EIf_j'')'] -$$

$$- EI (f_j' f_i'' - f_i' f_j'')\}_0^L . \tag{5.91}$$

Поскольку каждая из собственных форм колебаний подчинена граничным условиям (5.80), по выражению (5.91) убеждаемся в справедливости соотношения (5.88).

Собственные формы f_i (l) — решения однородного дифференциального уравнения (5.78). Поэтому функции Df_i (l), где D — произвольный коэффициент, также удовлетворяют этому уравнению и являются собственными формами колебаний.

В проводимом ниже рассмотрении вынужденных колебаний стержня используются заранее рассчитываемые собственные формы колебаний. Чтобы была определенность в задании этих собственных форм, производят их нормирование, т. е. назначается для какой-либо точки $l = a$ стержня абсолютное значение ординаты собственной формы f_i, равное, например, единице. Нормированные собственные формы, обозначаемые в дальнейшем как φ_i (l), связаны в этом случае с ранее введенными формами соотношением

$$\varphi_i(l) = A_i f_i(l), \tag{5.92}$$

где

$$A_i = 1/f_i(a). \tag{5.93}$$

Согласно формулам (5.92), (5.93), нормированные формы φ_i (l) безразмерны. Но если это необходимо по физическим соображениям (например, при рассмотрении формы φ_0^{**} движения стержня как твердого тела, — см. в конце данного параграфа), то нормированную форму φ_i можно рассматривать как величину с линейной размерностью, а соответствующую нормальную координату ξ_i считать безразмерной (см. следующий раздел).

Вынужденные колебания тонкого стержня. Колебания тонкого упругого стержня, подверженного действию поперечной динамической нагрузки с интенсивностью F_q (l, t), описываются дифференциальным уравнением (5.73), т. е. неоднородным уравнением

$$m(l)\,\ddot{q}\,(l,\ t)+[EI\,(l)\,q''\,(l,\ t)]''=F_q\,(l,\ t). \qquad (5.94)$$

В качестве начальных и граничных условий примем условия (5.79) и (5.80). Так же как и при решении обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, будем искать общее решение уравнения (5.94) в виде суммы двух функций:

$$q\,(l,\ t) = q_{\text{с}}\,(l,\ t) + q_{\text{в}}\,(l,\ t). \qquad (5.95)$$

Функцию $q_{\text{с}}$ (l, t), выражающую свободные колебания стержня, находим как решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным (5.79) и граничным (5.80) условиям. Тогда функция $q_{\text{в}}$ (l, t) должна удовлетворять неоднородному уравнению (5.94) и нулевым начальным и граничным условиям. При таком выборе функций $q_{\text{с}}$ и $q_{\text{в}}$ их сумма (5.95) будет искомым общим решением.

Функция $q_{\text{в}}$ (l, t) описывает колебания стержня под действием внешних сил (вынужденные колебания). Будем искать вынужденные колебания $q_{\text{в}}$ (l, t) в виде ряда по нормированным собственным формам φ_i (l), относящимся к свободным колебаниям:

$$q_{\text{в}}\,(l,\ t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\,(l)\,\xi_i\,(t). \qquad (5.96)$$

Здесь ξ_i (t) — подлежащие определению функции времени t, называемые *нормальными координатами*. Как видно из (5.96), нормальная координата ξ_i характеризует прогиб по i-й собственной форме в процессе вынужденных колебаний (функции φ_i (l) от времени не зависят).

Нормальными координатами, вообще говоря, называются координаты, при переходе к которым система связанных уравнений превращается в систему независимых уравнений. Ниже доказывается, что именно такими являются координаты ξ_i.

Подставляя принятую форму решения (5.96) в (5.94), находим

$$m\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\,\ddot{\xi}_i+\sum_{i=1}^{\infty}(EI\varphi_i'')''\,\xi_i=F_q\,(l,\ t). \qquad (5.97)$$

Умножив уравнение (5.97) на собственную функцию φ_j и произведя интегрирование по длине стержня, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i \int_0^L \varphi_i \varphi_j m dl + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \int_0^L (EI\varphi_i'')'' \varphi_j dl = \int_0^L F_q(l, t) \varphi_j dl. \qquad (5.98)$$

Преобразуя второй член при помощи (5.89), можно (5.98) переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i \int_0^L \varphi_i \varphi_j m dl + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \omega_i^2 \int_0^L \varphi_i \varphi_j m dl = \int_0^L F_q(l, t) \varphi_j dt. \qquad (5.99)$$

Используем теперь условие ортогональности (5.88) собственных форм (оно остается справедливым и для нормированных собственных форм φ). Вводя для случая $i = j$ обозначение

$$M_j = \int_0^L \varphi_j^2 m(l) dl, \qquad (5.100)$$

уравнение (5.99) записываем при учете условия (5.88) в виде

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \infty). \qquad (5.101)$$

Таким образом, получили систему независимых друг от друга уравнений, что характеризует $\xi_i(t)$ как нормальные координаты.

Величина M_j, определяемая формулой (5.100), называется *обобщенной массой* j-й собственной формы колебаний, а величина

$$\Xi_j = \int_0^L F_q(l, t) \varphi_j dl \qquad (5.102)$$

— *обобщенной силой* j-й формы колебаний.

Уравнение (5.101) определяет реакцию j-й формы колебаний на возмущающую силу $F_q(l, t)$ и не зависит от уравнений для других значений j только тогда, когда сила F_q не зависит от деформаций стержня, т. е. от q, $\dot{q}$ и т. д. В этом случае уравнения (5.101) могут быть решены раздельно. Окончательное решение, описывающее вынужденные колебания стержня, получается подстановкой решений (5.101) в (5.96).

При выводе дифференциального уравнения (5.94) изгибных колебаний стержня не учитывалось рассеяние энергии колебаний за счет внутреннего трения в материале стержня. В действительности это рассеяние всегда имеет место, благодаря чему собственные колебания получаются затухающими.

Известно несколько способов теоретической оценки демпфирования свободных колебаний стержня. Например, один из способов основан на предположении, что сила трения пропорциональна скорости $\dot{q}$ изменения прогиба, так что при использовании этого способа уравнения (5.101) оказываются взаимосвязанными. Однако на практике обычно основываются на экспериментальных данных, согласно которым все тона упругих колебаний имеют одинаковый относительный коэффициент демпфирования ζ, значение которого для баллистических ракет

составляет примерно 0,01. Принимая эту точку зрения, будем в дальнейшем записывать уравнения реакций собственных форм на возмущающую силу в виде

$$M_j \ddot{\xi}_j + 2\zeta_j M_j \omega_j \dot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \infty). \qquad (5.103)$$

Если возмущающая сила $F_q(l, t)$ является гармонической функцией времени, изменяющейся с частотой Ω, то при совпадении Ω с собственной частотой ω_j по j-й форме колебаний наступает резонанс.

Поперечная сила при изгибных колебаниях. Будем считать, что упругие деформации корпуса ракеты, возникающие при изгибных колебаниях, не влияют на аэродинамические силы, действующие на корпус ракеты. В этом случае влияние изгибных колебаний на динамику ракеты проявляется только в том, что вектор тяги ракетного двигателя получает дополнительное угловое отклонение, равное углу наклона упругой линии в точке подвеса ракетного двигателя, а сама точка подвеса смещается от центральной оси жесткого объекта на величину прогиба корпуса ракеты. Динамика замкнутой системы стабилизации также зависит от места расположения гироскопов, показания которых будут теперь определяться не только поворотом жесткой ракеты, но и углами наклона упругой линии в месте установки гироскопов.

Отождествляя ракету с тонким упругим стержнем, рассмотрим ее движение в плоскости тангажа. Сначала найдем силы, действующие на ракету в поперечном направлении. К таким силам относятся аэродинамическая сила

$$Y_a = C_3' \alpha \cos \alpha, \qquad (5.104)$$

которая в данном случае пропорциональна углу атаки α жесткого объекта, и составляющая силы тяжести, перпендикулярная продольной оси жесткой ракеты,

$$Y_g = m_0 g \sin \theta_0 \cdot \theta, \qquad (5.105)$$

которой в дальнейшем будем пренебрегать. При изучении углового движения это допустимо, так как движение ЦТ мало влияет на угловое положение объекта.

При рассмотрении поперечных упругих колебаний корпуса ракеты начало 0 неподвижной системы отсчета lq поместим в центре торца ракеты до стороны кормы, а ось абсцисс l совместим с равновесным положением продольной оси жесткого объекта, направив ее к носку ракеты (рис. 5.16).

Считая, что у кормы объекта имеет место положительный прогиб q и что ракетный двигатель отклонен в положительном направлении отсчета δ, находим согласно рис. 5.16 поперечную силу

$$Y_т = T \sin \varkappa = T \sin\left[\delta - \pi + \operatorname{arctg} \frac{\partial q(B, t)}{\partial l}\right] =$$

$$= T \sin \delta \cos\left[-\pi + \operatorname{arctg} \frac{\partial q(B, t)}{\partial l}\right] +$$

$$+ T \cos \delta \sin\left[-\pi + \operatorname{arctg} \frac{\partial q(B, t)}{\partial l}\right], \qquad (5.106)$$

где

$$\frac{\partial q(B,\ t)}{\partial l} = \frac{\partial q(l,\ t)}{\partial l}\bigg|_{l=l_B} \tag{5.107}$$

— наклон упругой линии в точке подвеса ракетного двигателя.

Учитывая малую величину углов δ и $-\pi + \frac{\partial q(B,t)}{\partial l}$, будем полагать:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta \approx \delta; \quad \cos\delta \approx 1; \\ &\sin\left[-\pi + \operatorname{arctg}\frac{\partial q}{dl}\right] \approx \operatorname{tg}\left[-\pi + \operatorname{arctg}\frac{\partial q}{\partial l}\right] = \frac{\partial q(B,\ t)}{\partial l}; \\ &\cos\left[-\pi + \operatorname{arctg}\frac{\partial q}{\partial l}\right] \approx 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.108}$$

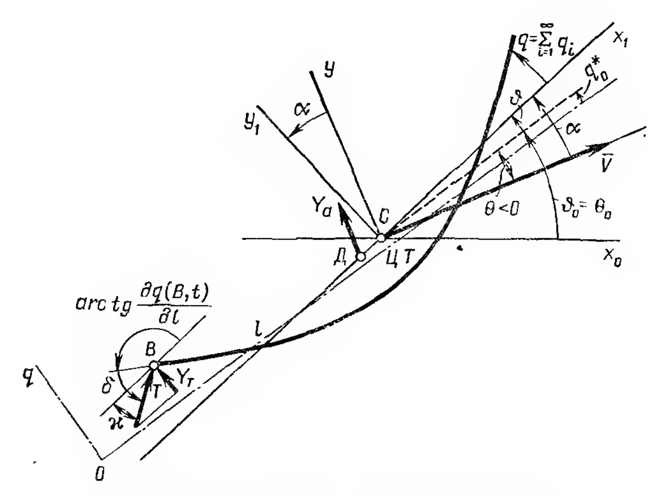


Рис. 5.16. Координаты упругой ракеты:
ϑ_0, θ_0 — равновесные значения; α, ϑ, θ — вариации

Тогда поперечная сила от тяги двигателя

$$Y_{\text{т}} = \left(T\delta + T\frac{\partial q(B,t)}{\partial l}\right). \tag{5.109}$$

Фигурирующий здесь наклон упругой линии можно определить из переписываемых ниже уравнений (5.96), (5.103) (вынужденные колебания q_B в дальнейшем обозначаются как q):

$$q(l,\ t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(l)\,\xi_i(t); \tag{5.110}$$

$$M_i\left(\ddot{\xi}_i + 2\zeta_i\,\omega_i\,\dot{\xi}_i + \omega_i^2\,\xi_i\right) = \Xi_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty). \tag{5.111}$$

Ограничимся учетом двух первых тонов упругих колебаний, т. е. будем полагать в указанных уравнениях $i = 1{,}2$. Собственные формы

$\varphi_1(l)$, $\varphi_2(l)$, собственные частоты ω_1, ω_2 и обобщенные массы M_1, M_2, соответствующие двум первым тонам упругих колебаний исследуемого объекта, считаем известными (определение этих характеристик возможно при известном распределении массы $m(l)$ и жесткости $EI(l)$ по длине объекта; для однородного стержня указанные характеристики приведены на рис. 5.15). Что касается обобщенных сил Ξ_1, Ξ_2, то при известных собственных формах φ_1, φ_2 и известном распределении нагрузки $F_q(l, t)$ их можно найти по формуле (5.102). В этой формуле фигурирует распределенная нагрузка F_q, т. е. плотность распределения нагрузки. Воспользовавшись единичными импульсными функциями δ (см. § 8.10), выразим функцию F_q плотности нагрузки через сосредоточенные силы:

$$F_q(l, t) = Y_a \cos\alpha \cdot \delta(l - l_Д) + Y_Т\, \delta(l - l_B). \qquad (5.112)$$

Подставляя теперь это выражение в (5.102), получим:

$$\Xi_i = \int_0^L [Y_a \cos\alpha \cdot \delta(l - l_Д) + Y_Т\, \delta(l - l_B)]\, \varphi_i(l)\, dl =$$
$$= Y_a \cos\alpha \cdot \varphi_i(l_Д) + Y_Т\, \varphi_i(l_B) \quad (i = 1,\ 2). \qquad (5.113)$$

Интегралы вычислялись здесь с учетом свойств δ-функций, согласно формуле (8.53 д).

С целью упрощения анализа влиянием вынужденных колебаний по одной собственной форме на вынужденные колебания по какой-либо другой собственной форме часто пренебрегают. Следуя этому подходу, опустим в выражении (5.109) член $T\,\frac{\partial q(B, t)}{\partial l}$. Тогда, учитывая (5.104), будем иметь

$$\Xi_i = C_з'\, \alpha \cos\alpha \cdot \varphi_i(l_Д) + T\delta\varphi_i(l_B) \quad (i = 1,\ 2). \qquad (5.114)$$

На основании (5.110), (5.111) и (5.114) можно получить выражение прогиба в точке B (в области изображений по Лапласу)*:

$$\hat{q}(l_B, s) = \varphi_1(l_B)\, \hat{\xi}_1(s) + \varphi_2(l_B)\, \hat{\xi}_2(s) =$$
$$= \frac{\varphi_1(l_B)\left[C_з' \hat{\alpha}\, \varphi_1(l_Д) + T\hat{\delta}\varphi_1(l_B)\right]}{M_1(s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 + \omega_1^2)} +$$
$$+ \frac{\varphi_2(l_B)\left[C_з' \hat{\alpha}\, \varphi_2(l_Д) + T\hat{\delta}\, \varphi_2(l_B)\right]}{M_2(s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2)}. \qquad (5.115)$$

Дифференцируя уравнение (5.110) по l и вводя обозначения

$$\partial\varphi_1(l)/\partial l = \sigma_1(l); \qquad (5.116а)$$
$$\partial\varphi_2(l)/\partial l = \sigma_2(l), \qquad (5.116б)$$

получим

$$\partial q(l, t)/\partial l|_{l = l_B} = \partial q(B, t)/\partial l = \sigma_1(l_B)\, \xi_1(t) + \sigma_2(l_B)\, \xi_2(t). \qquad (5.117)$$

* Вследствие малой величины угла атаки α принимаем $\cos\alpha \approx 1$.

Функция $\sigma_i(l)$ называется наклоном i-й нормированной собственной формы колебаний или i-м нормированным собственным наклоном. После перехода от функций времени к изображениям по Лапласу окончательно имеем:

$$\hat{\chi}(l_B, s) = L\left[\frac{\partial q(B, t)}{\partial l}\right] = \frac{\sigma_1(l_B)\left[C'_3\hat{\alpha}(s)\varphi_1(l_Д) + T\hat{\delta}(s)\varphi_1(l_B)\right]}{M_1(s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2)} + \\ + \frac{\sigma_2(l_B)\left[C'_3\hat{\alpha}(s)\varphi_2(l_Д) + T\hat{\delta}(s)\varphi_2(l_B)\right]}{M_2(s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2)}. \quad (5.118)$$

В этом выражении коэффициенты $\sigma_1(l_B)$, $\sigma_2(l_B)$ отрицательны, так как в (5.117) наклоны нормированных собственных форм в точке B подвеса ракетного двигателя отрицательны (см. рис. 5.16 и 6.32).

Таким образом, получающаяся при учете двух первых тонов изгибных колебаний и определяемая в области изображений по Лапласу поперечная сила от тяги двигателя

$$\hat{Y}_Т(s) = T\left\{\hat{\delta} + \frac{\sigma_1(l_B)\left[C'_3\hat{\alpha}(s)\varphi_1(l_Д) + T\hat{\delta}(s)\varphi_1(l_B)\right]}{M_1(s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_2(l_B)\left[C'_3\hat{\alpha}(s)\varphi_2(l_Д) + T\hat{\delta}(s)\varphi_2(l_B)\right]}{M_2(s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2)}\right\}. \quad (5.119)$$

Уравнения ракеты как жесткого тела при учете дополнительных сил от изгибных колебаний. Вводя поперечную силу, изображение по Лапласу которой — (5.119), в уравнение боковых сил, а выраженный через нее момент — $Y_Т(l_C - l_Д)$ — в уравнение моментов, получим уравнения движения, часто называемые уравнениями движения упругой ракеты. Хотя уравнения жесткой ракеты, в которые следует подставить $Y_Т$ и $-Y_Т(l_C - l_Д)$, хорошо известны, интересно получить их из общих уравнений упругих колебаний (5.110), (5.111), анализируя формы колебаний, соответствующие нулевой собственной частоте.

Чтобы найти собственные формы, соответствующие движению ракеты как твердого тела, в (5.78) положим $\omega = 0$:

$$(EIf_0''(l))'' = 0. \quad (5.120)$$

Рассматривая EIf_0'' как некоторую функцию, после двукратного интегрирования уравнения (5.120) получим

$$EIf_0''(l) = C_1 l + C_2. \quad (5.121)$$

Используя граничные условия (5.80), имеем $0 = C_2$; $0 = C_1 L + C_2$, откуда

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0. \quad (5.122)$$

Разделив после учета (5.122) левую и правую часть уравнения (5.121) на EI и дважды проинтегрировав это уравнение, находим

$$f_0(l) = C_3 l + C_4. \quad (5.123)$$

Полученное выражение позволяет считать, что движению ракеты как твердого тела соответствуют две собственные формы. Форма

$$f_0^*(l) = C_4 \qquad (5.124)$$

выражает поступательное перемещение ракеты в поперечном направлении, а форма

$$f_0^{**}(l) = C_3 l. \qquad (5.125)$$

— вращательное движение.

Собственную форму (5.124) после нормирования будем принимать в виде

$$\varphi_0^*(l) = 1, \qquad (5.126)$$

а собственную форму (5.125) — в виде

$$\varphi_0^{**}(l) = l - l_C, \qquad (5.127)$$

где l_C — координата ЦТ ракеты.

Располагая нормированными собственными формами, найдем вынужденные движения жесткой ракеты по этим собственным формам. Согласно (5.110), (5.111), вынужденное движение по форме $\varphi_0^*(l) = 1$ описывается уравнениями:

$$q_0^*(l, t) = \xi_0^*(t); \quad M_0^* \ddot{\xi}_0^* = \Xi_0^* \qquad (5.128)$$

(считаем, что демпфирование по этой форме движения отсутствует). По формуле (5.100) находим следующее выражение обобщенной массы:

$$M_0^* = \int_0^L \varphi_0^{*2}(l)\, m(l)\, dl = m_0, \qquad (5.129)$$

где m_0 — общая масса ракеты.

Поперечная нагрузка на корпус ракеты создается сосредоточенными силами $Y_a = C_3' \alpha \cos\alpha$ и Y_T, приложенными соответственно в центре давления $l = l_Д$ и в точке $l = l_B$ подвеса ракетного двигателя. Выражая распределенную нагрузку F_q через эти сосредоточенные силы, — см. (5.112), — и учитывая выражения (5.102), (5.104), (5.109), получим

$$\Xi_0^* = \int_0^L F_q(l, t)\, \varphi_0^*(l)\, dl = \int_0^L \left[C_3' \alpha \cos\alpha \delta^*(l - l_Д) + T\left(\delta + \frac{\partial q(B, t)}{\partial l}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \delta^*(l - l_B) \right] dl = C_3' \alpha \cos\alpha + T\left(\delta + \frac{\partial q(B, t)}{\partial l}\right), \qquad (5.130)$$

где δ — отклонение камеры ракетного двигателя; δ^* — единичная импульсная функция.

Таким образом, согласно (5.128) ÷ (5.130) вынужденное движение жесткой ракеты по форме $\varphi_0^*(l)$ определяется уравнением

$$m_0 \ddot{q}_0^* = C_3' \alpha \cos\alpha + T(\delta + \partial q(B, t)/\partial l). \qquad (5.131)$$

Выразим поступательное ускорение $\ddot{q}^*$ жесткой ракеты в направлении оси q через производную $\dot{\theta}$ угла наклона траектории (см. рис. 5.16). При $\dot{\theta} > 0$ центр тяжести C ракеты движется по кривой, выпуклость которой направлена в сторону отрицательной части оси y. Следовательно, центростремительное ускорение $V\dot{\theta}$ совпадает с положительным направлением оси y. Поскольку исследуется собственная форма φ_0^*, характеризующая поступательное движение, в указанном движении по выпуклой кривой необходимо считать $\vartheta \equiv 0$, что означает параллельность осей y_1 и q в любой момент времени. Отсюда следует, что $\ddot{q}^* = V\dot{\theta}\cos\alpha$. Подставляя это выражение в (5.131), получим уравнение

$$m_0 V\dot{\theta}\cos\alpha = C_3'\alpha\cos\alpha + T[\delta + \partial q(B, t)/\partial l], \tag{5.132}$$

выражающее баланс сил, действующих на жесткую ракету по ее поперечной оси y_1. В дальнейшем будем пользоваться уравнением боковых сил, записанных в обычной форме, т. е. в проекциях на ось y скоростной системы. Это уравнение имеет вид

$$m_0 V(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha}) = C_3\alpha + T[\delta + \partial q(B, t)/\partial l] \tag{5.133}$$

и отличается от уравнения (5.57а) (не считая ранее опущенного члена $m_0 g \sin\theta_0\theta$ и члена $T\delta$, который в (5.57а) мог бы быть учтен) только членом $T\partial q(B, t)/\partial l$.

Рассмотрим теперь вынужденное движение по форме $\varphi_0^{**}(l) = l - l_C$ жесткого объекта. Согласно (5.110), (5.111), это движение описывается следующими уравнениями:

$$q_0^{**}(l, t) = \varphi_0^{**}(l)\,\xi_0^{**}(t); \tag{5.134а}$$

$$M_0^{**}\ddot{\xi}_0^{**} = \Xi_0^{**} \tag{5.134б}$$

(демпфированием по этой форме движения пренебрегаем). Обобщенная масса и обобщенная сила находятся по формулам (5.100), (5.102):

$$\left.\begin{aligned} M_0^{**} &= \int_0^L m(l)\varphi_0^{**2}(l)\,dl = \int_0^L m(l)(l - l_C)^2\,dl = J;\\ \Xi_0^{**} &= \int_0^L F_q(l, t)\varphi_0^{**}(l)\,dl = \int_0^L [Y_a\cos\alpha\delta^*(l - l_Д) +\\ &+ Y_T\delta^*(l - l_B)](l - l_C)\,dl = Y_a(l_Д - l_C)\cos\alpha +\\ &+ Y_T(l_B - l_C) = \mp C_1\alpha - T(l_C - l_B)[\delta +\\ &+ \partial q(B, t)/\partial l] = M_{z_1}^*. \end{aligned}\right\} \tag{5.135}$$

Последнее из этих выражений было вычислено согласно правилу, что интеграл от произведения некоторой функции на $\delta^*(l - l_k)$ равен значению этой функции в точке $l = l_k$ существования импульса δ^*, — см. (8.53д). Как нетрудно видеть, роль обобщенной массы выполняет здесь момент инерции J ракеты вокруг ЦТ, а роль обобщенной

силы—результирующий момент M_{z1}^* вокруг ЦТ. Учитывая это, можно уравнение (5.134б) переписать в виде

$$J\ddot{\xi}_0^{**} = M_{z_1}^*. \tag{5.136}$$

Это уравнение показывает, что обобщенная координата ξ_0^{**} совпадает с вариацией ϑ угла тангажа. Производя замену $\xi_0^{**} = \vartheta$, получаем обычное уравнение моментов жесткой ракеты

$$J\ddot{\vartheta} = M_{z_1}^*. \tag{5.137}$$

Заметим, что выражение (5.135) для $M_{z_1}^*$ учитывает только моменты от сил, приложенных к ракете в поперечном направлении. Но рис. 5.16 показывает, что вследствие деформации упругой линии вокруг ЦТ жесткого объекта действует момент — Tq (l_B), создаваемый продольной силой $T\cos\varkappa \approx T$. Таким образом, в (5.137) вместо момента $M_{z_1}^*$ должен фигурировать момент

$$M_{z1} = \mp C_1\alpha - T\{(l_C - l_B)[\delta + \partial q(B, t)/\partial l] + q(l_B)\}. \tag{5.138}$$

Для статически устойчивой ракеты перед коэффициентом C_1 берется верхний знак, а для статически неустойчивой — нижний знак.

Из уравнения (5.134а), принимающего теперь вид

$$q_0^{**}(l, t) = \vartheta(t)(l - l_C), \tag{5.139}$$

можно заключить, что вынужденное движение жесткой ракеты по собственной форме $\varphi_0^{**}(l, t)$ представляет собой вращение ракеты вокруг ЦТ: при этом движении угловой коэффициент $\vartheta(t)$ прямой (5.139) является функцией времени (см. рис. 5.16).

На рис. 5.17 показана структурная схема ракеты, составленная по уравнениям (5.133) (5.137), (5.138), (5.115) и (5.118). Схема получена в предположении, что гироскоп, измеряющий угловое отклонение, установлен в точке $l_Г$ ракеты, и что его показания $\vartheta_Г$ являются выходной величиной ракеты. Как уже отмечалось, уравнения, а следовательно, и структурная схема учитывают лишь два первых тона изгибных колебаний.

Уравнения движения ракеты при учете зависимости аэродинамических сил от изгибных колебаний. Произведем дальнейшее уточнение математической модели упругой ракеты. С этой целью учтем изменения местных углов атаки, происходящие из-за изменения направлений местных потоков при вращении ракеты и ее деформации, а также из-за возникновения углов поворота упругой линии. В некоторой точке l (см. рис. 5.16) угол атаки ракеты

$$\alpha^*(l) = \alpha + \frac{l_C - l}{V}\dot{\vartheta} - \frac{\dot{q}}{V} + \frac{\partial q}{\partial l}, \tag{5.140}$$

где α — угол атаки жесткого объекта; ϑ — угол тангажа этого объекта; $q(l, t)$ — прогиб упругой линии в процессе изгибных колебаний; $\partial q/\partial l$ — угол поворота упругой линии.

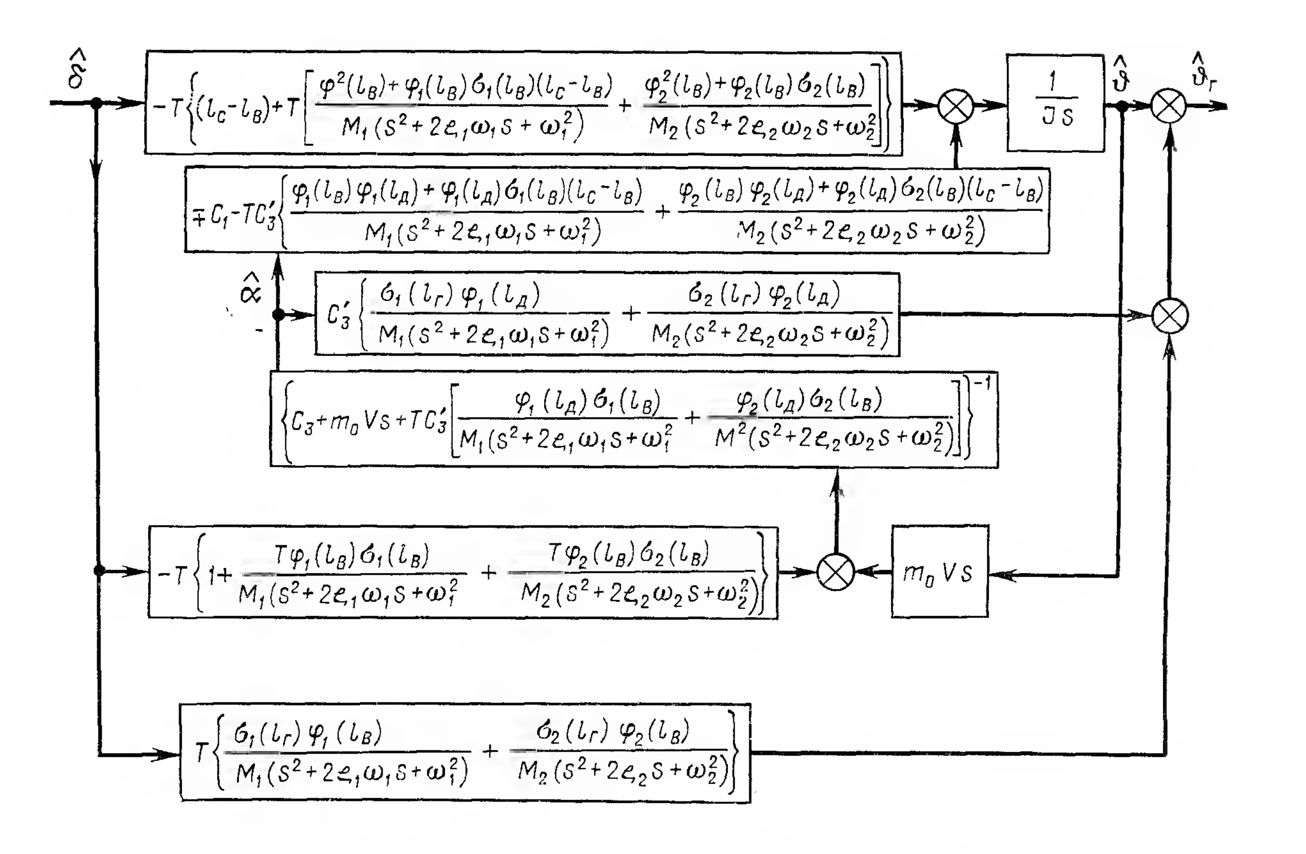


Рис. 5.17. Структурная схема ракеты при учете двух тонов изгибных колебаний

Аэродинамическая поперечная сила, аэродинамический момент и аэродинамические составляющие обобщенных сил примут тогда вид:

$$\left.\begin{aligned} Y_a &= q_D S \int_0^L c_y^\alpha(l)\,\alpha^*(l)\,dl; \\ M_{z1a} &= -q_D S \int_0^L c_y^\alpha(l)\,(l_C - l)\,\alpha^*(l)\,dl; \\ \Xi_{1a} &= \int_0^L \frac{\partial Y_a}{\partial l}\varphi_1(l)\,dl = q_D S \int_0^L c_y^\alpha(l)\,\varphi_1(l)\,\alpha^*(l)\,dl; \\ \Xi_{2a} &= \int_0^L \frac{\partial Y_a}{\partial l}\varphi_2(l)\,dl = q_D S \int_0^L C_y^\alpha(l)\,\varphi_2(l)\,\alpha^*(l)\,dl, \end{aligned}\right\} \quad (5.141)$$

где $q_D = 0{,}5\,\rho V^2$ — скоростной напор; S — площадь миделева сечения; $c_y^\alpha(l)$ — производная по углу атаки коэффициента подъемной силы как функция положения l элементарного участка dl ракеты.

Аэродинамические силы, действующие на ракету, теперь зависят от упругих деформаций корпуса ракеты, что может быть причиной явления флаттера, т. е. неустойчивости упругой ракеты. Более подробно этот вопрос рассматривается в § 6.8.

§ 5.11. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАКЕТЫ ПРИ УЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКАХ

Важным фактором, влияющим на устойчивость большой ракеты с жидкостными двигателями, является колебание жидкого топлива в баках. Эти колебания могут оказаться связанными с колебаниями ракеты как твердого тела и даже с упругими изгибными колебаниями, что может привести к неустойчивости всей системы.

Механические модели частично заполненного цилиндрического бака. Исследованию динамики объектов с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью, посвящены работы Н. Е. Жуковского и других ученых. В этих работах обоснована возможность имитации силового воздействия колеблющейся жидкости на содержащий ее сосуд механической моделью, состоящей из маятников или из масс, движение которых стеснено пружинами. Структура и параметры механической модели зависят от характера переносного движения сосуда, формы сосуда и свойств жидкости [6].

Волновой процесс, возникающий на свободной поверхности жидкости при движении сосуда, представляется бесчисленным множеством тонов колебаний. Каждому тону должна соответствовать своя механическая модель. Однако вследствие незначительного влияния по сравнению с первым тоном высшими тонами колебаний обычно пренебрегают.

Для цилиндрического сосуда, равновесное состояние которого характеризуется перпендикулярностью свободной поверхности жидкости к продольной оси цилиндра, механические модели первого тона колебаний, получающиеся при плоском движении сосуда, изображены на рис. 5.18. Одна модель (рис. 5.18, а) представляет собой маятник m_1, точка подвеса которого принадлежит оси цилиндра и располагается на расстоянии l_1 от свободной поверхности жидкости*. Другая модель состоит из массы m_1, движение которой вдоль перпендикулярной оси цилиндра направляющей ограничено пружинами (рис. 5.18, б). Для маятниковой модели $l_1 < 0$, так что точка подвеса располагается над свободной поверхностью жидкости.

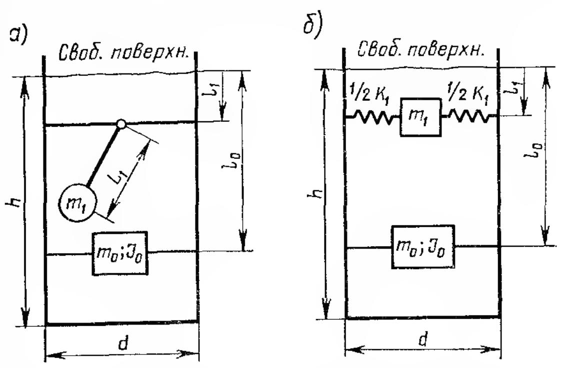


Рис. 5.18. Механические модели цилиндрического бака со свободной поверхностью жидкости (первый тон колебаний)

Обе механические модели учитывают тот факт, что часть жидкости не совершает колебаний относительно сосуда. Масса m_0 этой части жидкости на рис. 5.18 жестко связана со стенками сосуда; считается, что неподвижная часть жидкости имеет относительно оси, проходящей через центр массы m_0, момент инерции J_0. Напротив, груз m_1 маятника, представляющего подвижную часть жидкости (или масса m_1 на рис. 5.18, *б*), считается лишенным момента инерции, т. е. масса m_1 маятника предполагается точечной.

Как маятниковая модель, так и модель «масса — пружина» построены для идеальной, т. е. не имеющей вязкости жидкости, причем содержащий ее сосуд не имеет каких-либо перегородок [24]. Параметры механических моделей, заменяющих цилиндрический бак при плоском движении (первый тон колебаний) представлены в табл. 5.1. Эти параметры вычислялись исходя из условия, что высшие тона колебаний свободной поверхности жидкости отсутствуют. Тогда маятник, представляющий первый тон колебаний (см. рис. 5.18, *а*), в любой момент времени нормален к свободной поверхности жидкости.

Наличие внутри сосуда перегородок не изменяет значений параметров, указанных в табл. 5.1. Влияние перегородок сводится к тому, что всегда имеющаяся у реальной жидкости вязкость будет проявляться в более сильной степени, приводя к демпфированию свободных колебаний жидкости. Поэтому при наличии перегородок в механические

* Направление положительного отсчета l_1 показано на рис. 5.18, а формула, по которой рассчитывается l_1 для цилиндрического бака, приведена в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Маятниковая система	Система «масса—пружина»
$L_1 = \frac{d}{3,68} \operatorname{cth}\left(3,68\frac{h}{d}\right)$	$K_1 = m\left(\frac{g}{1,19h}\right)\left[\operatorname{th}\left(3,68\frac{h}{d}\right)\right]^2$
$m_1 = m\frac{d}{4,4h}\operatorname{th}\left(3,68\frac{h}{d}\right)$	$m_1 = m\left(\frac{d}{4,4h}\right)\operatorname{th}\left(3,68\frac{h}{d}\right)$
$m_0 = m - m_1$	$m_0 = m - m_1$
$l_1 = -\frac{d}{1,84}\operatorname{csch}\left(7,36\frac{h}{d}\right)$	$l_1 = \frac{d}{3,68}\operatorname{th}\left(3,68\frac{h}{d}\right)$
$l_0 = \frac{m}{m_0}\left[\frac{h}{2} - \frac{d^2}{8h}\right] - (l_1 + L_1)\frac{m_1}{m_0}$	$l_0 = \frac{m}{m_0}\left[\frac{h}{2} - \frac{d^2}{8h}\right] - l_1\frac{m_1}{m_0}$

$$J_0 + m_0 l_0^2 + m_1(l_1 + NL_1)^2 = J_{ж} +$$
$$+ m\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{md^2}{8}\left[1,995 - \frac{d}{h}\left(\frac{1,07\operatorname{ch}\left(3,68\frac{h}{d}\right) - 1,07}{\operatorname{sh}(3,68h/d)}\right)\right];$$

где $m = \frac{1}{4}\pi\rho d^2 h$, $J_{ж} = md^2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{1}{16}\right]$;

$N = 1$ — для маятниковой системы, $N = 0$ — для системы «масса—пружина»; для маятниковой системы $(l_1 + L_1)$ равно l_1 для системы «масса—пружина»; точка подвеса маятника располагается над свободной поверхностью жидкости на расстоянии $|l_1|$.

модели частично заполненного сосуда необходимо вводить жидкостные демпферы.

Передаточная функция ракеты при учете колебаний жидкости в баке. Рассмотрим сначала движение маятника относительно несущего его объекта. Выберем связанную с указанным объектом систему координат $x_1'y_1'$ так, чтобы ее начало совпадало с точкой подвеса маятника. Пусть эта система имеет угловое ускорение $\ddot{\vartheta}$, а ее начало O_1 — линейное ускорение $\overline{W}$ (рис. 5.19). Угол отклонения маятника относительно оси x_1' объекта обозначим через λ_1.

При изучении движения некоторого тела относительно неинерциальной системы координат необходимо к действующим на тело силам добавить еще инерционные силы от переносного движения этой системы координат. Следовательно, к массе m_1 маятника необходимо приложить инерционные силы $-m_1\overline{W}$ и $-m_1L_1\ddot{\vartheta}$, проистекающие соответственно от линейного и углового ускорений системы отсчета $x_1'y_1'$. Если пренебречь влиянием силы тяжести, движение маятника относительно системы $x_1'y_1'$ описывается уравнением

$$m_1 L_1^2 \ddot{\overline{\lambda}}_1 = [\overline{L}_1(-m_1\overline{W})] - m_1 L_1^2 \ddot{\overline{\vartheta}}, \qquad (5.142)$$

где первый член правой части — векторное произведение.

Рассмотрим теперь продольное движение ракеты, содержащей цилиндрические баки со свободной поверхностью жидкости. Будем считать, что ракета имеет столь большое продольное ускорение a_{x_1}, что в равновесном состоянии свободная поверхность жидкости перпендикулярна оси симметрии бака (рис. 5.20). Тогда баки можно заменить маятниковыми моделями, изображенными на рис. 5.18, *а*.

Рассмотрим влияние бака *1* на динамику ракеты. Массу m_0 и момент инерции J_0 неподвижной части жидкости бака по известным правилам (формула Штейнера) добавим к массе и моменту инерции ракеты вокруг оси z_1. Колеблющуюся относительно бака часть жидкости будем представлять только первым тоном колебаний. Параметры соответствующего маятника представлены в табл. 5.1.

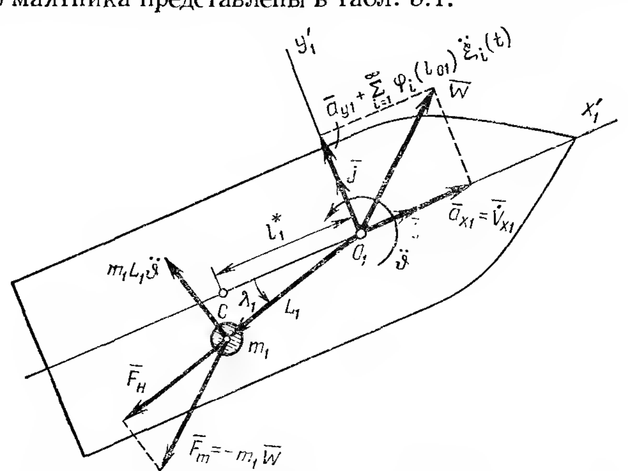


Рис. 5.19. Система сил, действующих на маятник при ускоренном движении объекта

Пусть l_1^* — расстояние между точкой подвеса O_1 маятника и центром масс C ракеты (рис. 5.20). При продольном a_{x_1}, поперечном a_{y_1} и угловом $\ddot{\vartheta}$ ускорениях ракеты, а также при изгибных колебаниях ее оси линейное ускорение точки O_1 подвеса маятника

$$\bar{W}=\bar{i}\,(a_{x_1}-l_1^*\dot{\vartheta}^2)+\bar{j}\,[a_{y_1}+l_1^*\ddot{\vartheta}+\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l_{01})\,\ddot{\xi}_i(t)], \qquad (5.143)$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$ — орты связанной системы x_1y_1; l_{01} — координата точки подвеса O_1 в системе ql (см. рис. 5.16).

Перенося начало связанной с ракетой системы в точку O_1 подвеса маятника, сводим задачу к ранее рассмотренному случаю (см. рис. 5.19). Векторное произведение, фигурирующее в соответствующем этому случаю уравнении (5.142), можно разложить по осям связанной системы, используя разложения сомножителей $\bar{W}$ и $\bar{L}_1$, определяемые соответственно выражением (5.143) и выражением

$$\bar{L}_1=-\bar{i}L_1-\bar{j}L_1\lambda_1. \qquad (5.144)$$

Выражение (5.144) справедливо при малом угле λ_1 и легко получается из рис. 5.19.

Раскрывая определитель

$$[\bar{L}_1 \bar{W}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -L_1 & -L_1 \lambda_1 & 0 \\ W_{x_1} & W_{y_1} & 0 \end{vmatrix}$$

и пренебрегая в выражении членом $l_1^* \dot{\vartheta}^2$ второго порядка малости, можно уравнение маятника (5.142) записать в следующем виде:

$$\bar{k} m_1 L_1^2 \ddot{\lambda}_1 = \bar{k} m_1 \{-L_1 a_{x_1} \lambda_1 + L_1 [a_{y_1} + l_1^* \ddot{\vartheta} + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i (l_{01}) \ddot{\xi}_i (t)]\} - \bar{k} m_1 L_1^2 \ddot{\vartheta}. \quad \textbf{(5.145)}$$

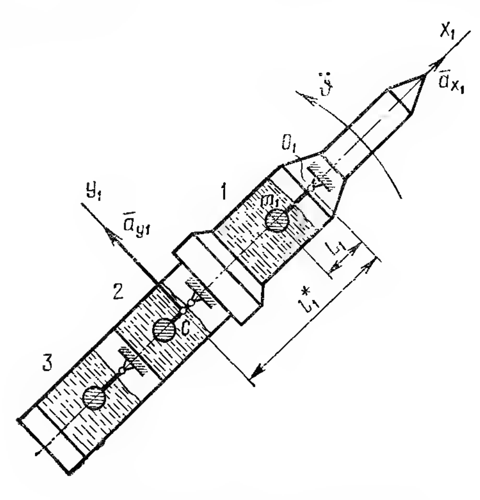


Рис. 5.20. Ракета с тремя баками

Проектируя центростремительное ускорение ракеты $V\dot{\theta}$ на поперечную ось y_1, получим

$$a_{y1} = V\dot{\theta} \cos \alpha, \quad (5.146)$$

где θ — угол наклона траектории; α — угол атаки.

Если тяга двигателя направлена по продольной оси, то продольное ускорение

$$a_{x_1} = \dot{V}_{x_1}. \quad (5.147)$$

Полагая $\cos \alpha \approx 1$, из (5.145) ÷ (5.147) окончательно получаем следующее уравнение маятника:

$$\ddot{\lambda}_1 + \omega_{n1}^2 \lambda_1 = \frac{1}{L_1} \left[V\dot{\theta} + (l_1^* - L_1)\ddot{\vartheta} + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i (l_{01}) \ddot{\xi}_i (t) \right], \quad (5.148)$$

где

$$\omega_{n1}^2 = \dot{V}_{x_1} / L_1. \quad (5.149)$$

Силовое воздействие маятника на ракету проявляется лишь в силе натяжения $F_н$ нити маятника, передаваемой на точку подвеса O_1. При малом отклонении λ_1 маятника и малой величине (по модулю) всех слагаемых выражения (5.143), по сравнению с a_{x_1}, действующая со стороны нити маятника на точку O_1 сила

$$F_н \approx m_1 \dot{V}_{x_1}. \quad (5.150)$$

Как видно из рис. 5.19, эта сила дает на поперечную ось ракеты y_1 проекцию

$$F_{н\,y1} = -m_1 \dot{V}_{x_1} \sin \lambda_1 \approx -m_1 \dot{V}_{x_1} \lambda_1, \quad (5.151)$$

за счет которой вокруг центра тяжести объекта C возникает момент

$$M_m = -m_1 l_1^* \dot{V}_{x_1} \lambda_1. \qquad (5.152)$$

Следовательно, для учета влияния колебаний жидкости в баке (бак 1 на рис. 5.20) необходимо в правую часть уравнения боковых сил (5.133) и уравнения моментов (5.137) ввести соответственно члены $-m_1 \dot{V}_{x_1} \lambda_1$ и $-m_1 l_1^* \dot{V}_{x_1} \lambda_1$ и к общей системе уравнений добавить уравнение (5.148).

Если ракета имеет несколько баков, влияние каждого из них может быть учтено аналогичным образом.

§ 5.12. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАКЕТЫ ПРИ УЧЕТЕ ИНЕРЦИОННОЙ РЕАКЦИИ ПОВОРОТНОЙ КАМЕРЫ ДВИГАТЕЛЯ

Если управление и стабилизация ракеты производятся поворотом камеры ракетного двигателя, то вследствие значительной массы и момента инерции камеры необходимо учитывать ее инерционную реакцию на корпус ракеты. Чтобы найти эту реакцию, свяжем с ракетой систему координат $x_1' y_1'$. Начало этой системы поместим в точку B подвеса двигателя, а ось x_1' направим по касательной к упругой линии ракеты (рис. 5.21). Будем считать, что в направлении продольной x_1 и поперечной y_1 осей жесткой ракеты имеются ускорения $\dot{V}_{x_1}$, $V\dot{\theta}$, создаваемые соответственно тягой двигателя и изменением угла θ наклона касательной к траектории. $\ddot{\vartheta}$ — угловое ускорение системы $x_1 y_1$, где ϑ — угол тангажа.

Система координат $x_1' y_1'$, связанная с упругой линией, имеет относительно системы $x_1 y_1$ линейное $\ddot{q}_B$ и угловое $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \ddot{\xi}_i$ ускорения, возникающие при изгибных колебаниях. Линейное ускорение вызывается процессом прогиба в точке B, а угловое—поворотом касательной к упругой линии в этой точке. Выражение углового ускорения $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{iB} \ddot{\xi}_i$ получается дифференцированием по времени угла наклона касательной $\nu = \operatorname{arctg} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \xi_i$ при учете, что $\nu \approx \pi$ (σ_{iB} — наклоны нормированных собственных форм в точке B, ξ_i — нормальные координаты при изгибных колебаниях — см. § 5.10).

При малых колебаниях абсолютное линейное ускорение начала системы координат $x_1' y_1'$ (точки B подвеса двигателя) определяется, как нетрудно видеть из рис. 5.21, выражением

$$\bar{a} = \bar{i} \dot{V}_{x1} + \bar{j} (V \dot{\theta} - l_0 \ddot{\vartheta} + \ddot{q}_B), \qquad (5.153)$$

а абсолютное угловое ускорение системы $x_1' \; y_1'$ — выражением

$$\varepsilon = \ddot{\vartheta} + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{iB} \ddot{\xi}_i. \qquad (5.154)$$

Положение камеры ракетного двигателя в системе $x_1' y_1'$ будем характеризовать углом δ поворота камеры (см. рис. 5.21). Чтобы записать уравнение движения камеры относительно неинерциальной системы отсчета $x_1' y_1'$, необходимо к действующим на камеру силам и моментам добавить инерционные силы и моменты, обусловленные движением системы отсчета $x_1' y_1'$. При положительных ускорениях системы $x_1' y_1'$ (см. рис. 5.21) инерционные силы и моменты действуют на камеру в направлениях, указанных на рис. 5.22 ($m_Д$, $J_Д$ — масса и момент инерции камеры относительно точки B).

Разложение радиуса-вектора $\bar{l}_Д$ центра масс O_1 камеры по осям системы $x_1' y_1'$ имеет вид

$$\bar{l}_Д = -\bar{i} l_Д - \bar{j} l_Д \delta. \tag{5.155}$$

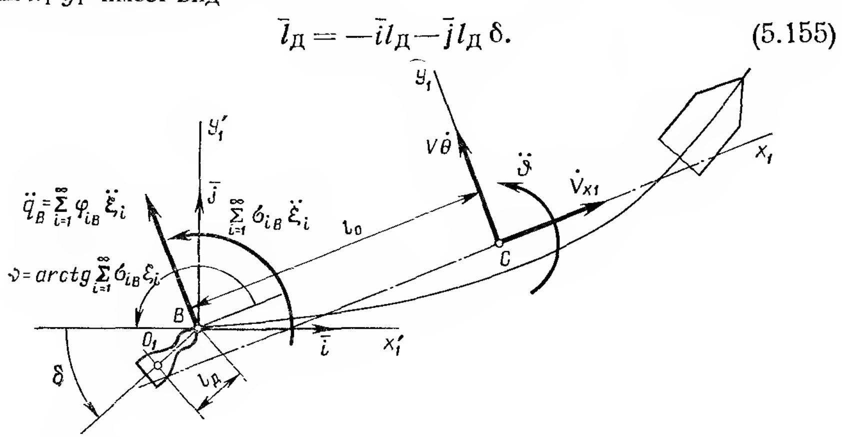


Рис. 5.21. Ускорения системы координат $x_1' y_1'$, связанной с упругой линией ракеты

С учетом разложений (5.153) и (5.155) момент вокруг точки B, создаваемый силой $-m_Д \bar{a}$, можно записать в виде:

$$[\bar{l}_Д (-m_Д \bar{a})] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -l_Д & -l_Д \delta & 0 \\ -m_Д a_{x_1'} & -m_Д a_{y_1'} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{k} [m_Д l_Д (V\dot{\theta} - l_0 \ddot{\vartheta} + \ddot{q}_B) - m_Д l_Д \dot{V}_{x_1} \delta]. \tag{5.156}$$

Если за направление положительного отсчета момента $M_п$, развиваемого сервоприводом камеры, принять направление, когда он создает положительное ускорение $\ddot{\delta}$, то согласно второму закону Ньютона можно записать следующее уравнение движения камеры относительно системы $x_1' y_1'$ (см. рис. 5.22),

$$J_Д \ddot{\delta} = M_п - J_Д \varepsilon + m_Д l_Д (V\dot{\theta} - l_0 \ddot{\vartheta} + \ddot{q}_B) - m_Д l_Д \dot{V}_{x_1} \delta. \tag{5.157}$$

Согласно третьему закону Ньютона сервопривод прикладывает к камере двигателя и к корпусу ракеты одинаковые по величине, но

противоположные по знаку моменты. Поэтому при учете (5.154), (5.157) инерционный момент, передаваемый со стороны поворотной камеры на корпус ракеты,

$$M_{\text{к}1} = -M_{\text{п}} = -J_{\text{Д}}\ddot{\delta} - m_{\text{Д}} l_{\text{Д}} \dot{V}_{x_1} \delta - (J_{\text{Д}} + m_{\text{Д}} l_{\text{Д}} l_0)\ddot{\vartheta} + \\ + m_{\text{Д}} l_{\text{Д}} V\dot{\theta} + m_{\text{Д}} l_{\text{Д}} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{iB} \ddot{\xi}_i - J_{\text{Д}} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{iB} \ddot{\xi}_i. \quad (5.158)$$

Кроме $M_{\text{к}1}$ вокруг центра масс ракеты C действует момент от силы реакции в точке B подвеса двигателя. Составляющая этой силы, перпендикулярная продольной оси x_1 жесткой ракеты, равна произведению массы $m_{\text{Д}}$ камеры на абсолютное ускорение массы в направлении оси y_1, взятое с обратным знаком. Это ускорение складывается из ускорения в совместном движении массы $m_{\text{Д}}$ с системой $x_1' \, y_1'$ и ускорения массы при ее движении относительно данной системы, причем первая составляющая (см. рис. 5.21), определяется выражением $V\dot{\theta} - (l_0 + l_{\text{Д}})\ddot{\vartheta} - l_{\text{Д}} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{iB}\ddot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{iB}\ddot{\xi}_i$, а вторая — выражением $-l_{\text{Д}}\ddot{\delta}$.

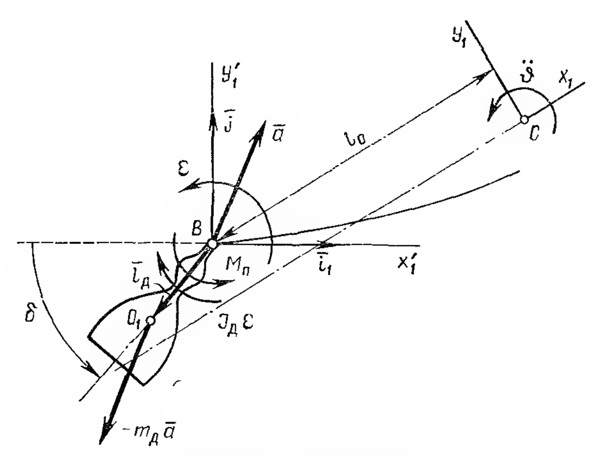


Рис. 5.22. Силы и моменты, действующие на камеру ракетного двигателя

Реакция в точке B действует на ракету в направлении, противоположном сумме указанных ускорений, и создает вокруг центра масс ракеты момент, действующий противоположно принятому направлению положительного отсчета угла ϑ. В правой части уравнения моментов жесткой ракеты такой момент должен записываться со знаком минус, и, следовательно, будет иметь вид

$$M_{\text{к}2} = m_{\text{Д}} l_0 \left[V\dot{\theta} - (l_0 + l_{\text{Д}})\ddot{\vartheta} - l_{\text{Д}} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{iB} \ddot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{iB} \ddot{\xi}_i - l_{\text{Д}} \ddot{\delta} \right]. \quad (5.159)$$

Аналогичным образом, можно найти момент вокруг центра масс ракеты, обусловливаемый составляющей реакции в точке B по оси x_1:

$$M_{\text{к3}} = m_{\text{Д}} l_0 \dot{V}_{x1} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{iB} \xi_i. \tag{5.160}$$

Учитывая, что момент инерции $J_{\text{Д}}$ поворотной камеры вокруг точки B связан с моментом инерции J_{01} относительно ее центра масс O_1 формулой $J_{\text{Д}} = J_{01} + m_{\text{Д}} l_{\text{Д}}^2$, из (5.158) ÷ (5.160) получаем окончательно выражение результирующего момента, создаваемого инерционными силами от поворотной камеры вокруг центра масс ракеты:

$$\begin{gathered} M_{\text{ИД}} = M_{\text{к1}} + M_{\text{к2}} + M_{\text{к3}} = -(J_{\text{Д}} + m_{\text{Д}} l_{\text{Д}} l_0)\ddot{\delta} - m_{\text{Д}} l_{\text{Д}} \dot{V}_{x_1} \delta - \\ -[J_{01} + m_{\text{Д}} (l_{\text{Д}} + l_0)^2]\ddot{\vartheta} + m_{\text{Д}} V (l_{\text{Д}} + l_0)\dot{\theta} + \\ + m_{\text{Д}} (l_{\text{Д}} + l_0) \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{iB} \ddot{\xi}_i - (J_{\text{Д}} + m_{\text{Д}} l_{\text{Д}} l_0) \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{iB} \ddot{\xi}_i + \\ + m_{\text{Д}} l_0 \dot{V}_{x_1} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{iB} \xi_i. \end{gathered} \tag{5.161}$$

Это выражение надо ввести в правую часть уравнения моментов (5.137).

Глава VI

ВЫБОР СТРУКТУРЫ И ПАРАМЕТРОВ АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ

Математическая модель баллистической ракеты, учитывающая упругость корпуса, колебания жидкого наполнения (для ракеты с жидкостными двигателями), инерционную реакцию исполнительного органа, весьма сложна. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение ракеты только в одной плоскости при учете двух первых тонов изгибных колебаний и первого тона колебаний жидкости в баке, имеет девятый порядок. Учет каждого из других баков увеличивает порядок на две единицы.

Однако сложность модели определяется не столько ее порядком, сколько наличием большого числа перекрещивающихся связей. Это затрудняет анализ и, в особенности, синтез системы стабилизации (при большом числе свободно выбираемых параметров) частотным методом или методом корневого годографа. Поэтому в последнее время значительное внимание уделяется чисто аналитическим методам анализа «большой системы» и синтеза ее по заданным требованиям.

Аналитические методы исследования оперируют с матричной формой записи дифференциальных уравнений и переменными состояния (см. § 5.6). Среди этих методов весьма перспективен метод модального управления, позволяющий определять структуру и параметры управляющего устройства, при которых обеспечивается наперед заданное расположение корней замкнутой системы.

В настоящей главе рассматриваются различные методы анализа и синтеза линейных систем и указываются области их предпочтительного применения при исследовании системы стабилизации баллистической ракеты.

§ 6.1. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ПРИ ПОМОЩИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

Корневой годограф (см. § 1.4) дает наглядное представление о перемещении корней замкнутой системы в зависимости от изменения коэффициента усиления по контуру этой системы и в настоящее время широко применяется при качественных исследованиях и выборе параметров настройки. Однако точное построение ветвей корневого годографа и их разметка по значениям коэффициента усиления в случае системы высокого порядка практически возможны только при использовании вычислительной машины.

Рассматриваемый ниже логарифмический корневой годограф дает такую же информацию о корнях замкнутой системы, как и обычный корневой годограф, но может быть построен при значительно меньших затратах труда и времени [10]. Кроме того, он представляет корни замкнутой системы в более удобной форме (возможность сразу видеть все корни при выбранном коэффициенте усиления).

Построение логарифмического корневого годографа. Логарифмический корневой годограф (ЛКГ) строится в той же системе координат, что и логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАХ) разомкнутой системы, причем способ его построения аналогичен способу построения указанной ЛАХ. Отличие, на операциях построения практически не сказывающееся, заключается лишь в том, что по оси абсцисс вместо шкалы ω применяется логарифмическая шкала $|s|$, где s — независимая переменная в области изображений по Лапласу, а по оси ординат — линейная шкала в отношении модуля $|G(s)|$, выраженного в децибелах ($G(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы).

В общем случае ЛКГ состоит из действительных отрицательных ветвей (изображаются в указанной прямоугольной системе координат утолщенными сплошными линиями), действительных положительных ветвей (изображаются утолщенными штриховыми линиями) и комплексных ветвей, имеющих разметку по значениям параметра ζ (часть комплексной ветви с положительными значениями ζ изображается тонкой сплошной, а с отрицательными ζ — тонкой штриховой линиями).

Корни замкнутой системы находятся по точкам пересечения оси абсцисс (ее положение относительно низкочастотной асимптоты ЛАХ $G(j\omega)$ определяется значением коэффициента усиления K разомкнутой системы) с ветвями ЛКГ. Абсциссы точек пересечения с действительными отрицательными ветвями, взятые с обратным знаком, равны действительным отрицательным корням замкнутой системы, а абсциссы точек пересечения с действительными положительными ветвями — положительным корням этой системы. Пересечение оси абсцисс с комплексной ветвью определяет параметры ζ и ω_n. Параметр ζ находится непосредственно по имеющейся на комплексной ветви разметке ζ как значение, соответствующее точке пересечения, а параметр ω_n — как абсцисса точки пересечения. Сами комплексные корни замкнутой системы при выбранном положении оси абсцисс (определяется коэффициентом K) выражаются через указанные параметры ζ и ω_n формулой:

$$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}. \tag{6.1}$$

Нахождение ветвей ЛКГ начинается с построения асимптотической комплексно-частотной ЛАХ разомкнутой системы асимп $|G(s)|$ дБ. Эта ЛАХ не имеет каких-либо отличий (за исключением обозначений по осям координат) от обычной асимптотической ЛАХ асимп $|G(j\omega)|$ дБ разомкнутой системы.

При построении асимп $|G(s)|$ дБ коэффициент усиления K разомкнутой системы (будем называть его коэффициентом усиления по контуру системы) принимаем равным некоторому произвольному значению.

В дальнейшем этот коэффициент рассматриваем как свободный (изменяемый) параметр, влияющий на распределение корней замкнутой системы.

Значение коэффициента K в децибелах определяется расстоянием до оси абсцисс низкочастотной асимптоты амплитудной характеристики $|G(j\omega)|$ (если эта асимптота горизонтальна) или отрезком вертикали $|s| = 1$, заключенным между осью абсцисс, и низкочастотной асимптотой или ее продолжением (если низкочастотная асимптота имеет наклон). *Низкочастотной* называется крайняя левая асимптота ЛАХ $|G(s)|$. При увеличении коэффициента усиления K ось абсцисс (в дальнейшем будем отмечать ее как «горизонталь K» или «линия 0 дБ») смещается относительно асимптотической ЛАХ $|G(s)|$ вниз.

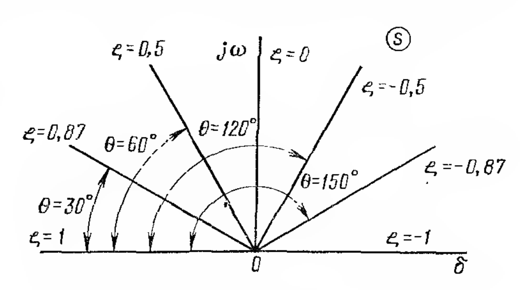


Рис. 6.1. Радиальные прямые ζ в плоскости s. $\zeta = \cos\theta$

Для получения действительных отрицательных ветвей ЛКГ предварительно строим точные амплитудную $|G(s)|^{(\zeta=1)}$ и фазовую $< G(s)^{(\zeta=1}$ логарифмические характеристики разомкнутой системы при изменении комплексной переменной s вдоль отрицательной части действительной оси (радиальная прямая $\zeta = 1$, см. рис. 6.1). Амплитудная комплексно-частотная характеристика $|G(s)|^{(\zeta=1)}$ получается добавлением к асимп $|G(s)|$ дБ поправок, графики которых для сомножителей $T_i s + 1$ и $T_j s - 1$ показаны соответственно на рис. 6.2 и рис. 6.3. Асимптотическая ЛАХ асимп $|G(s)|$ не зависит от радиальной прямой ζ, вдоль которой изменяется независимая переменная s, т. е. одна и та же для всех радиальных прямых ζ. Если сомножитель принадлежит числителю функции $G(s) = B(s)/A(s)$, то из семейства поправок выбирается кривая $\zeta = 1$ и, как она изображена на рис. 6.2 (или рис. 6.3), добавляется к ординатам асимп $|G(s)|$. При этом надо совместить ось симметрии поправки с вертикалью, проходящей через частоту излома $1/T_i$ (или $1/T_j$) асимптотической ЛАХ.

Поправка для окрестности излома $1/T_к$ от «устойчивого» квадратичного трехчлена $T_к^2 s^2 + 2\zeta_1 T_к s + 1$, фигурирующего сомножителем в числителе $G(s)$, получается удвоением ординат кривой ζ_1 (ζ_1 — относительный коэффициент демпфирования трехчлена), извлекаемой из семейства, изображенного на рис. 6.2. В случае «неустойчивого» квадратичного трехчлена $T_к^2 s^2 - 2\zeta_1 T_к s + 1$ в качестве поправки используется кривая с индексом $\zeta = -\zeta_1$ из семейства, показанного на рис. 6.3, после удвоения ее ординат.

Если какой-либо из рассмотренных сомножителей принадлежит знаменателю $G(s)$, то в качестве поправки следует использовать зеркальное отражение указанных кривых относительно оси абсцисс. Это положение распространяется на все другие аналогичные случаи и в *дальнейшем специально отмечаться не будет*. Фазовая логарифми-

ческая характеристика $\angle G(s)^{(\zeta=1)}$ состоит из горизонтальных отрезков, отстоящих от оси абсцисс (от линии 0°) и друг от друга на расстоянии, кратном 180°. Ступенчатый переход от одного отрезка к другому происходит при частотах $1/T_i$, соответствующих изломам асимптотической ЛАХ за счет множителей $T_i s + 1$. Такой вид характеристики $\angle G(s)^{(\zeta=1)}$ обусловливается тем, что точная фазовая характеристика $\angle (T_i s + 1)^{(\zeta=1)}$ представляет собой ступенчатую функ-

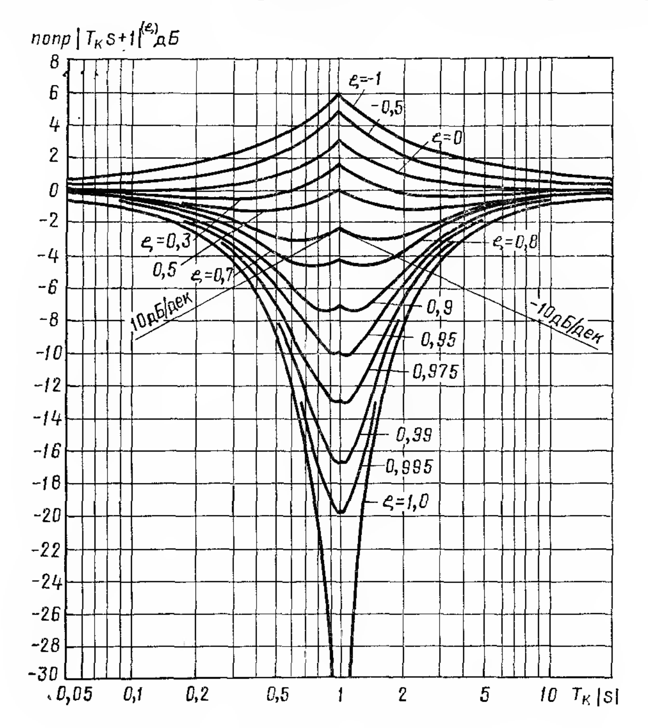


Рис. 6.2. График поправок к асимп $|T_k s+1|$ при изменении s вдоль различных радиальных прямых ζ

$$\text{попр}\,|T_k s+1|^{(\zeta)} = \sqrt{1-2\zeta T_k|s| + (T_k|s|)^2}, \quad |s| < \frac{1}{T}.$$

цию, отмеченную на рис. 6.4 индексом $\zeta = 1$, а фазовая характеристика $\angle (T_i s - 1)^{(\zeta=1)}$, как и характеристика $\angle s^{(\zeta=1)}$ — горизонталь, проходящую на уровне 180°.

При расположении множителей $Ts + 1$, $Ts - 1$, s в знаменателе $G(s)$ их фазовые характеристики получаются зеркальным отражением указанных кривых относительно оси абсцисс. Это положение относится ко всем другим рассматриваемым ниже случаям и в дальнейшем специально оговариваться не будет.

Фазовые характеристики $\angle (T_к^2 s^2 + 2\zeta_1 T_к s + 1)^{(\zeta=1)}$ и $\angle (T_к^2 s^2 - - 2\zeta_1 T_к s + 1)^{(\zeta=1)}$ не добавляют чего-либо к характеристике $\angle G(s)^{(\zeta=1)}$, так как на всем своем протяжении совпадают с осью абсцисс, т. е. имеют нулевые ординаты.

В § 1.4 было доказано, что корнями замкнутой системы являются значения s_i, при которых одновременно выполняются условия:

$$|G(s_i)| = 1; \qquad (6.2а)$$

$$\angle G(s_i) = 180°(1 + 2k), \qquad (6.2б)$$

где k — целое число. Поскольку условие (6.2а) всегда можно выполнить, подбирая коэффициент усиления K по контуру замкнутой системы, приходим к выводу, что принятому выше определению действительных отрицательных ветвей ЛКГ отвечают ветви точной ЛАХ $|G(s)|^{(\zeta=1)}$,

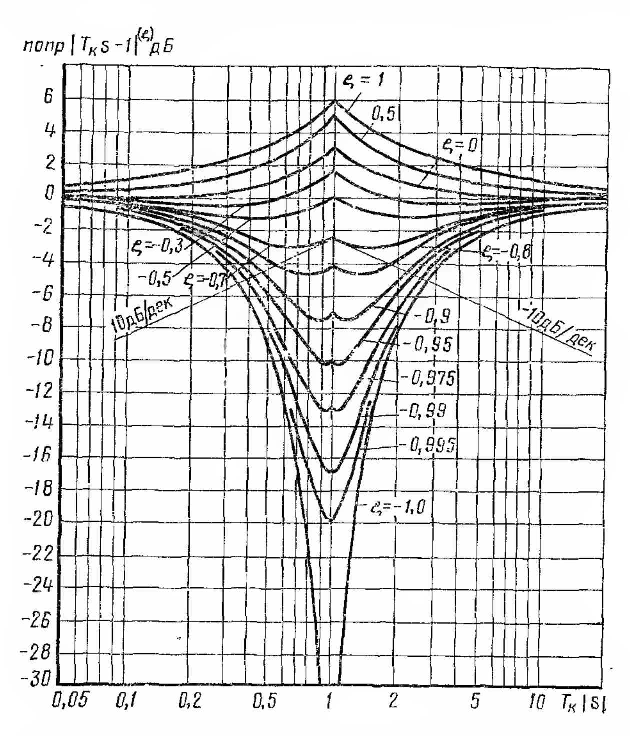


Рис. 6.3. Графики поправок к асимп $|T_k s - 1|$ при изменении s вдоль различных радиальных прямых ζ (отличаются от графиков на рис. 6.2 лишь знаком ζ).

расположенные против участков фазовой характеристики $\angle G(s)^{(\zeta=1)}$, уровень которых кратен в нечетное число раз значению $\pm 180°$. Эти участки $|G(s)|^{(\zeta=1)}$ выделяем, как было условлено, утолщенной сплошной линией и рассматриваем в качестве действительных отрицательных ветвей ЛКГ.

Действительные положительные ветви ЛКГ находятся аналогичным образом. Отличие состоит лишь в том, что они получаются из логарифмических комплексно-частотных характеристик $|G(s)|^{(\zeta=-1)}$, $\angle G(s)^{(\zeta=-1)}$, соответствующих изменению s вдоль положительной части действительной оси (радиальная прямая $\zeta = -1$). При пост-

роении ЛАХ $|G(s)|^{(\zeta=-1)}$ к асимптотической характеристике в окрестности изломов, вызываемых сомножителями $Ts+1$, $Ts-1$, добавляются поправки $\zeta=-1$, извлекаемые соответственно из семейств поправок, изображенных на рис. 6.2 и рис. 6.3. В качестве поправки в окрестности излома от «устойчивого» квадратичного трехчлена $T_к^2 s+ 2\zeta_1 T_к s+1$, используется кривая, получаемая удвоением ординат поправки $\zeta=-\zeta_1$, извлекаемой из семейства на рис. 6.2. В случае «неустойчивого» трехчлена $T_к^2 s^2 - 2\zeta_1 T_к s+1$ аналогичная поправка получается удвоением ординат кривой, отмеченной на рис. 6.3 индексом $\zeta=\zeta_1$.

Фазовая логарифмическая характеристика $\angle G(s)^{(\zeta=-1)}$ состоит из горизонтальных отрезков, отстоящих от оси абсцисс и друг от друга на расстоянии 180°. При ее построении следует учитывать, что все сомножители, кроме $Ts-1$, не вносят фазового сдвига, т. е. имеют фазовые характеристики с ординатами, равными нулю. Что касается сомножителя $Ts-1$, то его фазовая характеристика представляет собой ступенчатую функцию $\zeta=-1$, изображенную на рис. 6.5. Если этот сомножитель принадлежит знаменателю $G(s)$, то уровень низкочастотной части фазовой характеристики $\angle[1/(Ts-1)]$ должен быть $-180°$ (высокочастотная часть остается на уровне 0°).

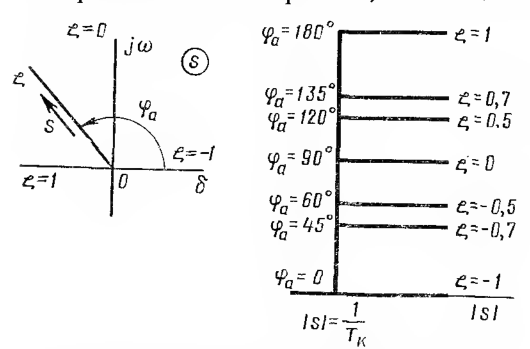


Рис. 6.4. Асимтотические фазовые характеристики множителя $T_k s+1$ для различных радиальных прямых ζ

Действительными положительными ветвями ЛКГ служат участки точной ЛАХ $|G(s)|^{(\zeta=-1)}$, расположенные против участков фазовой характеристики $\angle G(s)^{(\zeta=-1)}$, уровень которых кратен в нечетное число раз значению $\pm 180°$.

Следует отметить, что оба конца любой действительной ветви ЛКГ (отрицательной и положительной) уходят в бесконечность вдоль каких-либо асимптот. Чаще всего такими асимптотами служат вертикали, проходящие через изломы асимптотической ЛАХ $|G(s)|$, вызываемые некоторыми сомножителями $T_i s+1$ и $T_j s-1$. Эту роль могут также выполнять низкочастотная и высокочастотная асимптоты амплитудной характеристики разомкнутой системы $|G(s)|$ дБ.

При известных действительных ветвях ЛКГ качественное протекание комплексных ветвей обычно оценивается без всякого труда. Если $G(s)$ не содержит множителей в виде квадратичных трехчленов, то комплексные ветви начинаются в точках минимума, а заканчиваются в точках максимума действительных ветвей. При этом точки комплексных ветвей, совпадающие с экстремальными точками отрицательных действительных ветвей, отмечаются параметром $\zeta=1$, а точки, расположенные в экстремумах действительных положительных ветвей, —

параметром $\zeta = -1$. При отсутствии у действительных ветвей требуемого числа экстремумов комплексные ветви асимптотически стремятся к высокочастотной или низкочастотной асимптотам ЛАХ $|G(s)|$.

Если передаточная функция $G(s)$ разомкнутой системы содержит в качестве множителя квадратичный трехчлен, то корневой годограф всегда имеет соответствующую этому множителю комплексную ветвь. Для трехчленов $T_к^2 s^2 + 2\zeta_1 T_к s + 1$, $T_к^2 s^2 - 2\zeta_1 T_к s + 1$, принадлежащих знаменателю $G(s)$, верхний конец указанной комплексной ветви асимптотически стремится при $K \to 0$ к вертикали, проходящей через излом $|s| = 1/T_к$ асимптотической ЛАХ $|G(s)|$. При этом параметр ζ, размечающий комплексную ветвь, стремится соответственно к ζ_1 и $-\zeta_1$, где ζ_1 — относительный коэффициент демпфирования трехчлена. Нижний конец комплексной ветви оканчивается в точке максимума действительной ветви или стремится к высокочастотной асимптоте амплитудной характеристики $|G(s)|$.

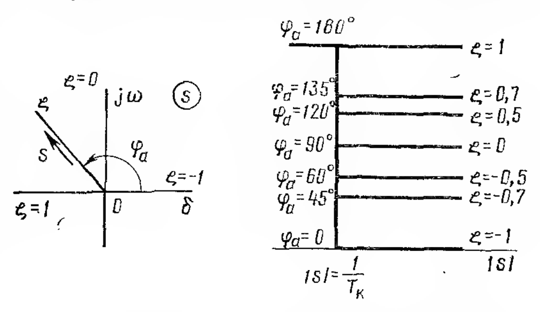


Рис. 6.5. Асимпотические фазовые характеристики множителя $T_k s - 1$ для различных радиальных прямых ζ

При наличии трехчлена в числителе $G(s)$ к указанной вертикали $|s| = 1/T_к$ асимптотически стремится при $K \to \infty$ нижний конец комплексной ветви. При этом параметр ζ, как и в предыдущем случае, стремится к ζ_1 (для устойчивого трехчлена) или к ζ_1 (для неустойчивого трехчлена). Верхний конец данной комплексной ветви или начинается из точки минимума действительной ветви, или асимптотически стремится к вертикали, определяемой изломом от какого-либо трехчлена, входящего в знаменатель $G(s)$, или асимптотически приближается к низкочастотной асимптоте, если ее наклон — 40 дБ/дек.

Точное определение промежуточных точек комплексных ветвей ЛКГ связано с проведением более значительной работы. Чтобы найти, например, положение точек комплексных ветвей с отметкой $\zeta = 0{,}5$, необходимо построить точные амплитудную $|G(s)|^{(\zeta=0,5)}$ и фазовую $\angle G(s)^{(\zeta=0,5)}$ логарифмические комплексно-частотные характеристики разомкнутой системы, соответствующие изменению независимой комплексной переменной s вдоль радиальной прямой $\zeta = 0{,}5$ (см. рис. 6.1). Затем необходимо отметить на фазовой характеристике $\angle G(s)^{(\zeta=0,5)}$ точки с ординатами, кратными в нечетное число раз $\pm 180°$, и снести по вертикали эти точки на график точной амплитудной характеристики $|G(s)|^{(\zeta=0,5)}$ дБ. Найденные таким образом точки характеристики $|G(s)|^{(\zeta=0,5)}$ по своему положению относительно асимптотической ЛАХ $|G(s)|$ представляют собой точки комплексных ветвей, имеющие отметку $\zeta = 0{,}5$.

Амплитудная характеристика $|G(s)|^{(\zeta=0,5)}$ получается добавлением к асимптотической ЛАХ $|G(s)|$ соответствующих поправок. Поправками к изломам от сомножителей $Ts+1$ и $Ts-1$ служат кривые $\zeta = 0,5$, извлекаемые соответственно из семейств, показанных на рис. 6.2 и рис. 6.3. Для определения поправок в окрестности излома, вызванного устойчивым квадратичным трехченом $T_к^2 s^2 + 2\zeta_1 T_к s + 1$, необходимо по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \zeta^+ &= \cos[\arccos 0,5 - \arccos \zeta_1]; \\ \zeta^- &= \cos[\arccos 0,5 + \arccos \zeta_1] \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

вычислить приведенные коэффициенты ζ^+, ζ^- и в качестве искомых поправок взять из семейства, показанного на рис. 6.2, кривые с отметками $\zeta = \zeta^+$ и $\zeta = \zeta^-$. Таким образом, в случае квадратичного трехчлена вместо одной используются две поправки (кривые ζ^+ и ζ^-), ординаты которых перед добавлением к асимптотической ЛАХ, должны быть просуммированы с учетом знаков. Поправки к излому от неустойчивого квадратичного трехчлена $T_к^2 s^2 - 2\zeta_1 T_к s + 1$ определяются аналогичным образом, но при использовании приведенных коэффициентов

$$\left.\begin{aligned} \zeta^+ &= -\cos[\arccos 0,5 - \arccos \zeta_1]; \\ \zeta^- &= -\cos[\arccos 0,5 + \arccos \zeta_1] \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

и семейства поправок, изображенного на рис. 6.3.

Фазовая логарифмическая комплексно-частотная характеристика $\angle G(s)^{(\zeta=0,5)}$, подобно амплитудной, получается как сумма асимптотической фазовой характеристики асимп $\angle G(s)^{(\zeta=0,5)}$ и поправок попр $\angle G(s)^{(\zeta=0,5)}$. Составляющие асимп $\angle (T_i s+1)^{(\zeta=0,5)}$ и асимп $\angle (T_j s-1)^{(\zeta=0,5)}$ характеристики асимп $\angle G(s)^{(\zeta=0,5)}$ представляются ступенчатыми функциями $\zeta = 0,5$, показанными на рис. 6.4 и рис. 6.5. Перепад в уровнях низкочастотной и высокочастотной асимптот этих характеристик составляет соответственно 120° и 60° (равен дополнению угла $\theta = \arccos 0,5$ до 180°).

К асимптотическим характеристикам $\angle (T_i s+1)$ и $\angle (T_j s-1)$ добавляются кривые поправок $\zeta = 0,5$, извлекаемые соответственно из семейств, показанных на рис. 6.6 и рис. 6.7. Поправки состоят из двух симметричных относительно точки (1,0) ветвей, ординаты которых по мере удаления от этой точки стремятся к нулю. Левая ветвь добавляется к низкочастотной, а правая — к высокочастотной асимптотам $\angle (Ts \pm 1)^{(\zeta=0,5)}$.

Поправка $\zeta = 0,5$, показанная на рис. 6.6, имеет максимальные ординаты $\pm$ 60°, а поправка с тем же индексом ζ на рис. 6.7 — ординаты $\pm$ 30°. Легко видеть, что при добавлении этих поправок к асимптотическим характеристикам точные фазовые характеристики $\angle (Ts+1)^{(\zeta=0,5)}$ и $\angle (Ts-1)^{(\zeta=0,5)}$ получаются гладкими.

Фазовая характеристика множителя s, т. е. $\angle s^{(\zeta=0,5)}$, представляет собой горизонталь, уровень которой определяется углом $\varphi_a^{(\zeta=0,5)}$, равным дополнению угла $\theta = \arccos 0,5$ до 180°. В данном случае $\angle s^{(\zeta=0,5)} = \varphi_a^{(\zeta=0,5)} = 120°$.

Рассмотрим, наконец, фазовые характеристики квадратичных трехчленов. Чтобы эти характеристики получались гладкими, приходится различать три случая взаимного расположения радиальной прямой ζ_2, вдоль которой изменяется независимая переменная s (в данном случае $\zeta_2 = 0{,}5$), и точек $s_к$, $s_к^*$, $\bar{s}_к$, $\bar{s}_к^*$, изображающих соответственно корни

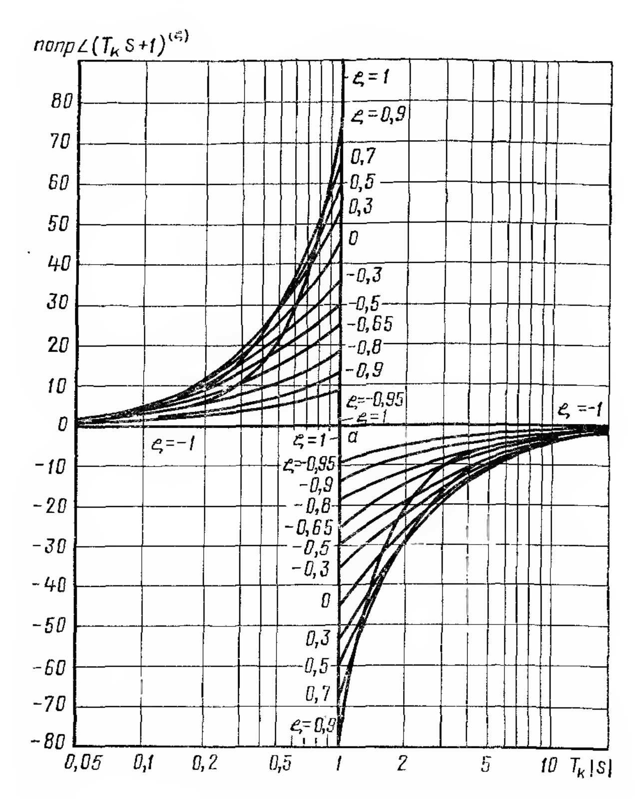


Рис. 6.6. Графики поправок к асимп $\angle (T_k s + 1)^{(\zeta)}$ при изменении вдоль различных радиальных прямых попр $\angle (T_k s + 1)^{(\zeta)} = \operatorname{arctg} \dfrac{T_k |s| \sqrt{1-\zeta^2}}{1 - T_k |s| \zeta}$;

где $|s| < \dfrac{1}{T_k}$

трехчлена и зеркальное отражение корней относительно оси $j\omega$. Для устойчивого трехчлена $T_к^2 s^2 + 2\zeta_1 T_к s + 1$ эти случаи представлены в табл. 6.1, а для неустойчивого $T_к^2 s^2 - 2\zeta_1 T_к s + 1$ — в табл. 6.2.

Случай I соответствует прохождению радиальной прямой ζ_2 между корнем $s_к$ и его зеркальным отражением $\bar{s}_к$, случай II — между корнями $s_к$, $s_к^*$ и случай III — между отраженными точками $\bar{s}_к$, $\bar{s}_к^*$. В последних двух случаях радиальные прямые ζ_2 располагаются только в верх-

ней полуплоскости s (вследствие симметрии корней относительно действительной оси надобность рассмотрения радиальных прямых ζ_2 в нижней полуплоскости s отсутствует).

Индексы ζ^+, ζ^- поправок, показанных в третьей колонке таблицы, для устойчивого трехчлена вычисляются по формулам (6.3), а сами кривые поправок берутся из семейства, изображенного на рис. 6.6. Для неустойчивого трехчлена используются формулы (6.4) и семейство поправок, показанных на рис. 6.7. Штриховыми линиями изображены поправки, получаемые зеркальным отражением относительно оси абсцисс поправок, отмеченных в соответствующем семействе (рис. 6.6 и рис. 6.7) тем же индексом ζ.

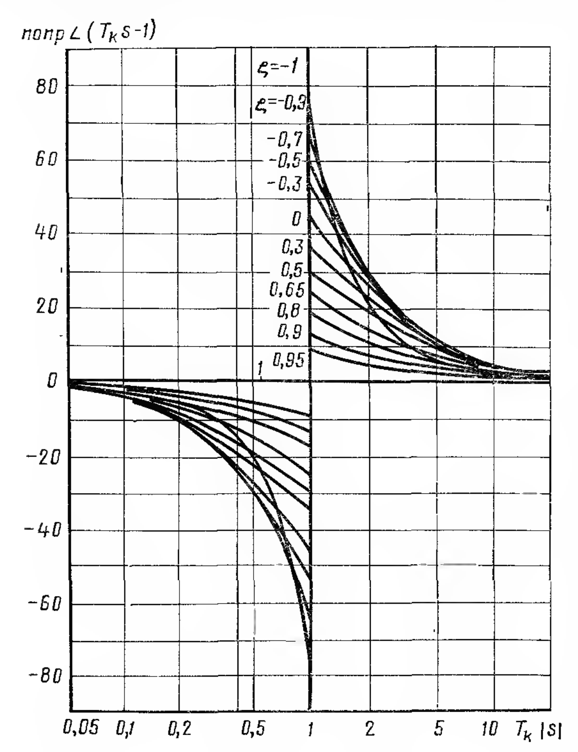


Рис. 6.7. Графики поправок к асимп $\angle (T_k s - 1)^{\zeta}$ при изменении s вдоль различных радиальных прямых ζ (получаются зеркальным отражением кривых на рис. 6.6 и изменением знака ζ на обратный)

Выбор коэффициента усиления по контуру системы. При помощи ЛКГ определим значение коэффициента усиления K_v по контуру системы «объект — автопилот с жесткой обратной связью» (см. § 1.4), обеспечивающее максимальный коэффициент демпфирования ζ колебательной составляющей переходного процесса. Передаточная функция разомкнутой системы

$$G(s) = K_v (s/3 + 1)/\{s(s/12 + 1)[(1/2)^2 s^2 + 2 \cdot 0{,}8 (s/2) + 1]\}. \quad (6.5)$$

На рис. 6.8 штриховой линией изображена асимп $|G(s)|$. С целью получения действительных отрицательных ветвей ЛКГ построим характеристики $|G(s)|^{(\zeta=1)}$, $\angle G(s)^{(\zeta=1)}$, соответствующие изменению s вдоль радиальной прямой $\zeta = 1$. Амплитудная характеристика $|G(s)|^{(\zeta=1)}$ находится суммированием асимп $|G(s)|$ и поправок попр $|G(s)|^{(\zeta=1)}$, изображенных на рис. 6.8 около отдельной горизонтали. Номер рисунка, отмечающий каждую кривую поправки, относится к семейству, из которого взята эта поправка. Знак $\vee$ означает, что поправка перенесена на чертеж так, как она изображена в семействе, знак $\wedge$

Таблица 6.1

Расположение	Асимптотическая и точная фазовые характеристики	Поправки к асимптотической фазовой характеристике
I; ζ_2, $j\omega$, ⓢ, ζ_1, s, φ^{+}, φ^{-}, $\bar{s}_K$, s_K, 0, s_K^*, $\bar{s}_K^*$; $\varphi^{+}=\varphi^{-}>0$	$\varphi^{+}+\varphi^{-}$; 0°; $\lvert s\rvert=\frac{1}{T_K}$; $\lvert s\rvert$	ζ^{-}; ζ^{+}
II; $j\omega$, ⓢ, ζ_1, s_K, $\bar{s}_K$, ζ_2, φ^{-}, $\bar{s}$, δ, 0, s_K^*, φ^{+}, $\bar{s}_K^*$; $\varphi^{+}<0,\ \varphi^{-}>0$	0°; $\lvert s\rvert=\frac{1}{T_K}$; $\lvert s\rvert$; $\varphi^{+}+\varphi^{-}$	ζ^{-}; ζ^{+}
III; ⓢ, $j\omega$, ζ_1, s_K, $\bar{s}_K$, ζ_2, $\bar{s}$, δ, 0, φ^{+}, φ^{-}, s_K^*, $\bar{s}_K^*$; $\varphi^{+}=\varphi^{-}>0$	$\varphi^{+}+\varphi^{-}$; 0°; $\lvert s\rvert=\frac{1}{T_K}$; $\lvert s\rvert$	ζ^{+}; ζ^{-}

указывает, что на чертеже использовано зеркальное отражение относительно оси абсцисс поправки, показанной в семействе. Перед добавлением к асимп $|G(s)|$ ординаты накладывающихся друг на друга поправок суммируются с учетом знаков.

Низкочастотная часть фазовой характеристики $\angle G(s)^{(\zeta=1)}$ (левый горизонтальный отрезок — 180°) обусловливается интегрирующим звеном $1/s$. Ступенчатый переход кверху на 180°, наблюдающийся при $|s|=3$, вызывается сомножителем числителя $s/3+1$, а такой же переход при $|s|=12$ книзу — сомножителем знаменателя $s/12+1$.

Ветви амплитудной характеристики $|G(s)|^{(\zeta=1)}$, расположенные против участков —180° фазовой характеристики $\angle G(s)^{(\zeta=1)}$, являются действительными отрицательными ветвями ЛКГ. Рассматриваемая

Таблица 6.2

Расположение	Асимптотическая и точная фазовые характеристики	Поправки к асимптотической фазовой характеристике
I. $j\omega$; $\bar{s}_к$; $s_к$; $\overset{*}{\bar{s}}_к$; $s^*_к$; s; ζ_2; φ^+, φ^-; 0; $\varphi^+ = \varphi^- > 0$	$360°$; $0°$; $\varphi^+ + \varphi^-$; $\lvert s \rvert = \frac{1}{T_к}$; $\lvert s \rvert$	ε^+; ε^-
II. $j\omega$; $\bar{s}_к$; $s_к$; $\overset{*}{\bar{s}}_к$; $s^*_к$; s; ε_2; φ^+, φ^-; 0; δ; $\varphi^+ = \varphi^- > 0$	$0°$; $\varphi^+ + \varphi^-$; $\lvert s \rvert = \frac{1}{T_к}$; $\lvert s \rvert$	ε^-; ε^+
III. $j\omega$; $\bar{s}_к$; $s_к$; $\overset{*}{\bar{s}}_к$; $s^*_к$; s; ε_2; φ^+; φ^-; 0; $\varphi^+ > 0$; $\varphi^- < 0$	$0°$; $\lvert s \rvert = \frac{1}{T_к}$; $\lvert s \rvert$; $\varphi^+ + \varphi^-$	ε^+; ε^-

замкнутая система имеет две такие ветви. Они выделены на рис. 6.8 утолщенными сплошными линиями. Действительных положительных ветвей ЛКГ не имеет, так как фазовая характеристика $\angle G(s)^{(\zeta = -1)}$ на всем своем протяжении проходит на уровне 0°.

Квадратичный трехчлен знаменателя $G(s)$ порождает комплексную ветвь, верхний конец которой асимптотически стремится к вертикали $|s| = 1/T_k = 2$ (при этом $\zeta \to \zeta_1 = 0{,}8$). Ввиду отсутствия у действительных ветвей ЛКГ точки максимума, нижний конец комплексной ветви асимптотически приближается к высокочастотной асимптоте ЛАХ $G(s)$, а указываемый вдоль комплексной ветви параметр ζ — к значению $\zeta_a = -0{,}5$.

Величину ζ_a легко найти при использовании асимптот обычного корневого годографа (см. рис. 1.20). Действительно параметр ζ в выражении $-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ комплексного корня определяется как $\zeta = \cos\theta$. Здесь θ — угол, составленный с отрицательным направлением действительной оси лучом, проведенным из начала координат в точку комплексной ветви, изображающую рассматриваемый корень (ω_n — длина отрезка луча между этой точкой и началом координат).

При $K_v \to \infty$ корень смещается по асимптоте в бесконечность, а угол θ стремится к углу θ_a, составляемому асимптотой *1* с отрицательным направлением действительной оси. Следовательно,

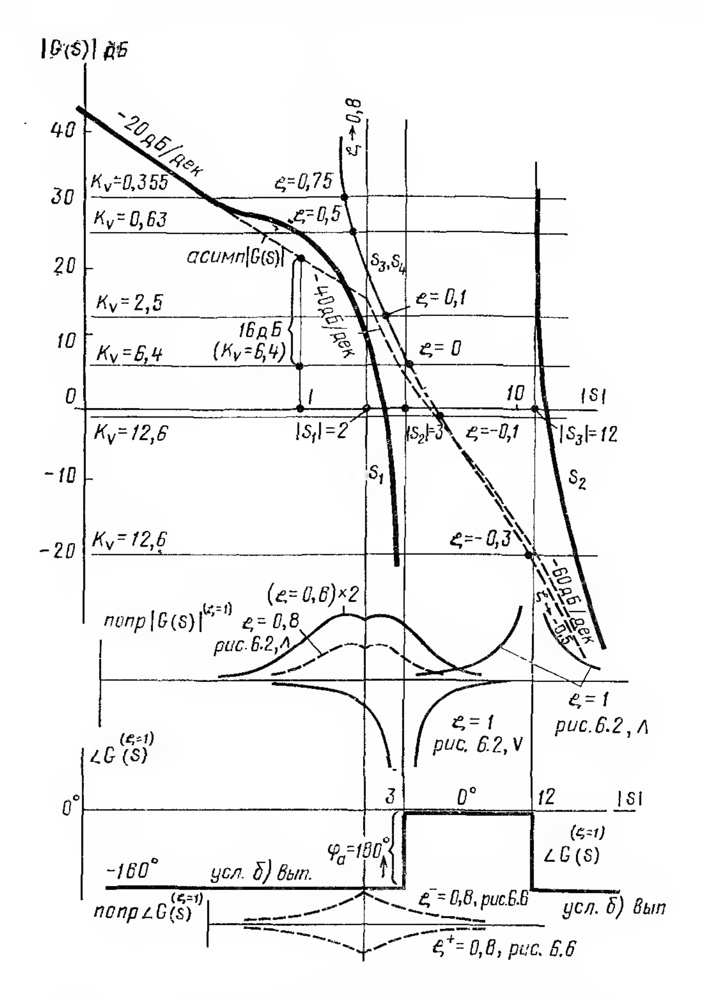


Рис. 6.8. Логарифмический корневой годограф системы

$$G(s) = \frac{K_v\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{12}+1\right)\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2+2\cdot 0{,}8\cdot\frac{s}{2}+1\right]}$$

$\zeta \to \cos\theta_a = \zeta_a$. В рассматриваемом случае $\theta_a = 120°$, так что $\zeta_a = -0{,}5$.

Промежуточные точки комплексной ветви можно найти путем построения амплитудной $G(s)^{(\zeta=\zeta_2)}$ и фазовой $\angle G(s)^{(\zeta=\zeta_2)}$ харак-

теристик разомкнутой системы для наклонных радиальных прямых ζ_2 и выделения точек амплитудной характеристики, которым соответствует фазовый сдвиг — 180°. Например, строя характеристики для радиальной прямой $\zeta_2 = 0$ (обычные логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы), легко определить точку комплексной ветви с отметкой $\zeta = 0$. В рассматриваемом случае эта точка расположена у нижнего конца отрезка асимптотической ЛАХ $|G(s)|$ с наклоном — 40 дБ/дек. Комплексная ветвь изображена на рис. 6.8 сплошной и штриховой тонкими линиями, соединяющимися в точке $\zeta = 0$. Сплошная часть кривой размечена положительными, а штриховая — отрицательными значениями ζ.

При возрастании коэффициента усиления по контуру K_v от нуля горизонталь K_v, изображающая ось абсцисс, т. е. линию «0 дБ», из бесконечно удаленного «верхнего» положения смещается относительно асимптотической ЛАХ вниз. Корни замкнутой системы, получающиеся при том или ином значении K_{vi}, определяются точками пересечения соответствующей горизонтали K_{vi} с ветвями ЛКГ. При $K_v = 6{,}4$ линия «0 дБ» пересекает комплексную ветвь в точке $\zeta = 0$, вещественная часть $\zeta\omega_n$ комплексных сопряженных корней обращается в нуль и замкнутая система оказывается на колебательной границе устойчивости. При дальнейшем возрастании K_v точкам пересечения линии «0 дБ» с комплексной ветвью соответствуют $\zeta < 0$ и, следовательно, положительные вещественные части — $\zeta\omega_n$ комплексных корней. Отсюда следует, что по коэффициенту усиления диапазон устойчивости замкнутой системы

$$0 < K_v < 6{,}4. \tag{6.6}$$

Как видно из ЛКГ, при увеличении K_v от нуля относительный коэффициент демпфирования ζ монотонно убывает от значения 0,8 и при $K_v = 6{,}4$ становится равным нулю. Вместе с тем для увеличения статической точности системы стабилизации этот коэффициент должен быть возможно более высоким. В этой ситуации приходится прибегать к компромиссному решению. Если, например, удовлетвориться демпфированием $\zeta = 0{,}1$, то для коэффициента усиления можно принять значение $K_v = 2{,}5$ 1/с.

Задачи, решаемые с помощью ЛКГ. Обычный и логарифмический корневые годографы легко получаются один от другого и хорошо дополняют друг друга. Логарифмический корневой годограф уточняет положение комплексных ветвей обычного корневого годографа и облегчает разметку всех ветвей по значениям коэффициента усиления K. В свою очередь обычный корневой годограф позволяет установить значение ζ_a, к которому стремится параметр ζ комплексной ветви ЛКГ, примыкающей к высокочастотной асимптоте ЛАХ разомкнутой системы.

В общем, однако, логарифмический корневой годограф более удобен при исследованиях, а доставляемая им информация более многообразна. Не говоря уже о том, что ЛКГ позволяет видеть сразу все корни замкнутой системы при любом коэффициенте усиления K по контуру, можно по нему без всякого труда судить о чувствительности того

или иного корня к изменению коэффициента усиления K и постоянных времени T_i системы. В связи с возможностью оценки влияния постоянных времени на корни при выбранном коэффициенте усиления выявляются пути упрощения сложной системы и, как следствие этого, способы приближенного выражения некоторых корней через физические параметры системы. Все это в значительной мере проясняет связь между физическими параметрами и корнями и облегчает проектирование системы. Следует также заметить, что ЛКГ сохраняет и все преимущества, свойственные частотным методам исследования.

§ 6.2. КОРНЕВОЙ ГОДОГРАФ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ УЧЕТЕ ДВУХ ТОНОВ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Проиллюстрируем возможности метода ЛКГ, исследовав этим методом влияние, оказываемое изгибными колебаниями ракеты на устойчивость системы стабилизации. Будем считать, что динамика жесткого объекта не зависит от упругих колебаний, а сами упругие колебания определяются только поперечной составляющей силы, развиваемой управляющим органом. В уравнении боковых сил жесткого объекта будем учитывать лишь аэродинамическую силу, а из всех тонов упругих колебаний только первый тон.

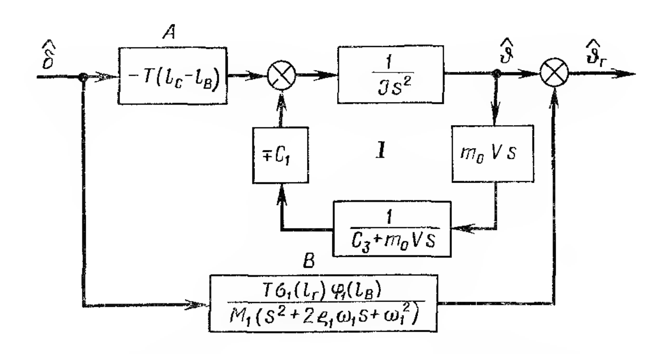


Рис. 6.9. Упрощенная структурная схема ракеты

В этих предположениях структурная схема ракеты, показанная на рис. 5.17, значительно упрощается, и из эффектов, вызываемых изгибными колебаниями, будет учитывать лишь изменение угла наклона упругой линии в месте установки гироскопа (рис. 6.9). В таком виде структурная схема ракеты (довольно часто к передаточной функции звена B добавляются также слагаемые, соответствующие второму, третьему и т. д. тонам изгибных колебаний) принимается в подавляющем большинстве исследований.

Передаточная функция ракеты. Найдем передаточную функцию ракеты, структурная схема которой показана на рис. 6.9. Нетрудно

видеть, что цепь из внутреннего контура I и звена A, соответствующая жесткой ракете, имеет передаточную функцию

$$W_{ж}(s)=\frac{T\,(l_C-l_B)\,(m_0\,Vs+C_3)}{s\,(Jm_0\,Vs^2+C_3\,Js\pm C_1\,m_0\,V)}\,. \tag{6.7}$$

а вся структурная схема, состоящая из параллельного соединения звеньев B и $W_{ж}\,(s)$ — передаточную функцию

$$W_{y1}\,(s)=$$

$$=\frac{T\sigma_1\,(l_Г)\,\varphi_1\,(l_B)}{M_1\,(s^2+2\zeta_1\,\omega_1 s+\omega_1^2)}\left[1-\frac{M_1(l_C-l_B)\,(m_0\,Vs+C_3)\,(s^2+2\zeta_1\,\omega_1\,s+\omega_1^2)}{\sigma_1(l_Г)\varphi_1\,(l_B)\,s\,(Jm_0\,Vs^2+C_3\,Js\pm C_1\,m_0\,V)}\right]. \tag{6.8}$$

Чтобы записать эту функцию как произведение элементарных множителей, найдем корни полинома, образующегося в числителе стоящего в квадратных скобках выражения после приведения его к общему знаменателю. Корни можно, например, определить, построив логарифмический корневой годограф при использовании функции

$$G_1\,(s)=-\frac{M_1\,(l_C-l_B)\,(m_0\,Vs+C_3)\,(s^2+2\zeta_1\,\omega_1\,s+\omega_1^2)}{\sigma_1\,(l_Г)\,\varphi_1\,(l_B)\,s\,(Jm_0\,Vs^2+C_3\,Js\pm C_1\,m_0\,V)}\,,$$

представляющей собой второе слагаемое в квадратных скобках.

Будем рассматривать статически неустойчивую баллистическую ракету. В этом случае перед C_1 $(C_1>0)$ берется нижний знак и передаточная функция запишется в стандартной форме как

$$G\,(s)=-\frac{K_v\,(T_1's+1)\,(T_2'^2s^2+2\zeta_1\,T_2's+1)}{s\,(T_1\,s+1)\,(T_2\,s-1)}\,, \tag{6.9}$$

где $K_v=M_1\omega_1C_3\,(l_C-l_B)/[C_1m_0V\sigma_1\,(l_Г)\varphi_1\,(l_B)]$;

$$\left.\begin{aligned} T_1'&=m_0\,V/C_3;\quad T_2'=1/\omega_1;\\ T_1&=m_0\,V\,\sqrt{J}/(C_3\sqrt{J}+\sqrt{JC_3^2+C_1\,m_0^2\,V^2});\\ T_2&=m_0\,V\,\sqrt{J}/(-C_3\sqrt{J}+\sqrt{JC_3^2+C_1\,m_0^2\,V^2}).\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Параметры типовой ракеты этого класса для 72-й секунды полета имеют следующие значения [26]:

$$\left.\begin{aligned} &m_0=72\,300\text{ кг}; && l_C-l_B=10\text{ м};\\ &J=32\cdot10^5\text{ кгм}^2; && \omega_1=15\text{ 1/с};\\ &V=400\text{ м/с}; && M_1=22\,700\text{ кг};\\ &C_3=882\,000\text{ Н}; && \sigma_1\,(l_Г)=0{,}015\text{ 1/м};\\ &C_1=8\,820\,000\text{ Н}; && \varphi_1\,(l_B)=1;\\ & && \zeta_1=0{,}01.\end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Подставляя эти значения в формулы (6.10) и производя вычисления, запишем передаточную функцию (6.9) в виде

$$G_1(s) = -\frac{12\,(32{,}8s+1)\,(0{,}07^2 s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}07s+1)}{s\,(0{,}57s+1)\,(0{,}572s-1)}. \tag{6.12}$$

ЛКГ системы, имеющей характеристическое уравнение

$$1 + G_1(s) = 0, \tag{6.13а}$$

где $G_1(s)$ определяется выражением (6.12), показан на рис. 6.10. В процессе построения ЛКГ знак минус перед передаточной функцией учи-

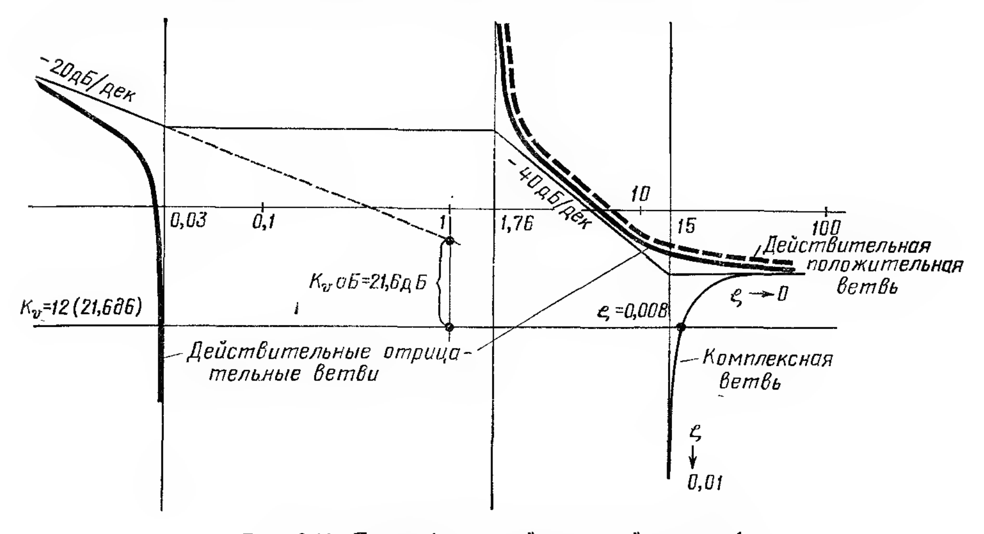


Рис. 6.10. Логарифмический корневой годограф

$$G(s) = -\frac{12\,(32{,}8s+1)\,(0{,}07^2s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}07s+1)}{s\,(0{,}57s+1)\,(0{,}572s-1)}$$

тывался тем, что независимо от рассматриваемой радиальной прямой к фазовой характеристике при всех комплексных частотах $|s|$ добавлялся сдвиг $-180°$. Из ЛКГ видно, что при коэффициенте усиления $K_v = 12$ 1/с корни уравнения (6.13а)

$$s_1 = -1/33;\; s_2,\, s_3 = -0{,}008\cdot 17 \pm j17\sqrt{1-0{,}008^2}. \tag{6.13б}$$

Корни мало чувствительны к небольшим изменениям коэффициента усиления K_v.

Производя в выражении (6.8) приведение к общему знаменателю и полагая $s=0$ (при сохранении интегрирующего звена $1/s$), находим коэффициент усиления упругой ракеты

$$K_1 = \frac{TC_3\,(l_C - l_B)}{C_1\, m_0\, V}, \tag{6.14}$$

не отличающийся, как это видно из (6.7), от коэффициента усиления жесткой ракеты. Таким образом, на основании (6.8), (6.12), (6.13б) и (6.14) приходим к следующей передаточной функции ракеты, учитывающей первый тон изгибных колебаний,

$$W_{y1}(s) = -\frac{K_1(33s+1)(0{,}06^2 s^2+2\cdot 0{,}008\cdot 0{,}06s+1)}{s(0{,}57s+1)(0{,}572s-1)(0{,}07^2 s^2+2\cdot 0{,}001\cdot 0{,}07s+1)}. \quad (6.15)$$

Передаточная функция ракеты, учитывающая помимо первого также второй тон изгибных колебаний, определяется выражением:

$$W_{y12}(s) = \frac{T\sigma_2(l_Г)\varphi_2(l_B)}{M_2(s^2+2\zeta_2\omega_2 s+\omega_2^2)}\left[1+W_{y1}(s)\frac{M_2(s^2+2\zeta_2\omega_2 s+\omega_2^2)}{T\sigma_2(l_Г)\varphi_2(l_B)}\right]. \quad (6.16)$$

Это выражение вытекает из структурной схемы, получающейся добавлением к структурной схеме (рис. 6.9) еще одной параллельной связи, которая аналогична связи B, но имеет параметры второго тона изгибных колебаний. Для рассматриваемой ракеты параметры, относящиеся ко второму тону изгибных колебаний, имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_2 = 60\ 1/\text{с};\ \xi_2 = 0{,}01;\ M_2 = 35\,900\ \text{кг};\\ &\sigma_2(l_Г) = -0{,}033\ 1/\text{м};\ \varphi_2(l_B) = 1. \end{aligned}\right\} \quad (6.17)$$

Чтобы передаточную функцию $W_{y12}(s)$ представить в виде произведения элементарных множителей, поступим так же, как в случае первого тона колебаний. Логарифмический корневой годограф, построенный на основании функции

$$G_{12}(s) = \frac{126(33s+1)(0{,}06^2s^2+2\cdot 0{,}008\cdot 0{,}06s+1)(0{,}017^2 s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}017s+1)}{s(0{,}57s+1)(0{,}572s-1)(0{,}07^2 s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}07s+1)}, \quad (6.18)$$

представляющей собой второе слагаемое в квадратных скобках (6.16) при подстановке в него выражений (6.14), (6.15) и числовых значений (6.17), показан на рис. 6.11. По этому ЛКГ при K_v = 126 1/с определяем корни:

$$\left.\begin{aligned} &s_1 = -1/32{,}2;\ s_2 s_3 = -0{,}009\cdot 16{,}7 \pm j16{,}7\sqrt{1-0{,}09^2};\\ &s_4,\ s_5 = -0{,}0082\cdot 57 \pm j57\sqrt{1-0{,}0082^2}. \end{aligned}\right\} \quad (6.19)$$

Коэффициент усиления ракеты сохраняет прежнее значение (6.14).

С учетом корней (6.19) передаточная функция ракеты, учитывающая первый и второй тона изгибных колебаний,

$$W_{y12}(s) = -\frac{K_1(32s+1)(0{,}063^2 s^2+2\cdot 0{,}009\cdot 0{,}063s+1)(0{,}018^2 s^2+2\cdot 0{,}008\cdot 0{,}018s+1)}{s(0{,}57s+1)(0{,}572s-1)(0{,}07^2s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}07s+1)(0{,}017^2 s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}017s+1)}. \quad (6.20)$$

Исследование устойчивости и стабилизация системы. Передаточная функция упругой ракеты (6.20) содержит два комплексных диполя, каждый из которых порождается соответствующим тоном изгибных колебаний. *Комплексным диполем* называется здесь сочетание двух близких по своим постоянным времени и относительным коэффициентам демпфирования трехчленов, один из которых входит в числитель, а другой — в знаменатель передаточной функции. Постоянная времени трехчлена в числителе диполя, соответствующего первому тону изгибных колебаний, меньше постоянной времени трехчлена в знаменателе этого диполя, в то время как в диполе от второго тона колебаний (постоянные времени 0,017

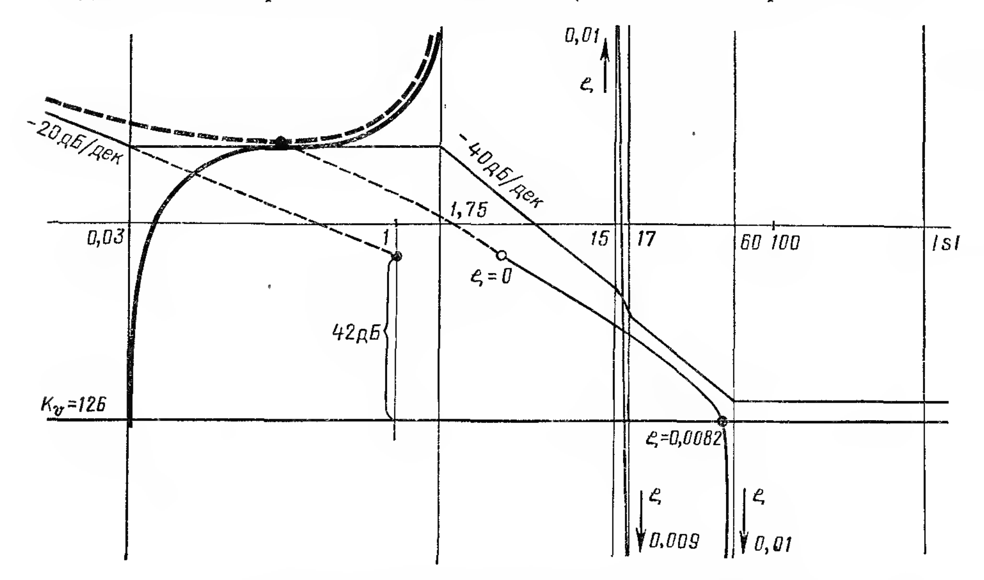


Рис. 6.11. Логарифмический корневой годограф

$$G(s)=\frac{K_v\,(33s+1)\,(0{,}06^2s^2+2\cdot 0{,}008\cdot 0{,}06s+1)\,(0{,}017^2s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}017s+1)}{s\,(0{,}57s+1)\,(0{,}572s-1)\,(0{,}07^2s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}07s+1)}$$

и 0,018) наблюдается обратное положение. Эта неодинаковость относительного расположения нулей и полюсов диполей, как будет видно из дальнейшего, оказывает существенное влияние на устойчивость системы стабилизации ракеты.

Будем считать, что ракета имеет автомат стабилизации по углу тангажа с передаточной функцией

$$\hat{\delta}/\hat{\vartheta}=K_a/(0{,}2\,s+1). \tag{6.21}$$

Передаточная функция $G(s)$ по контуру системы «ракета — автомат стабилизации», получаемая перемножением функций (6.20), (6.21) с опусканием знака минус, показывает, что ЛКГ этой системы имеет вид, изображенный на рис. 6.12. ЛКГ состоит из двух действительных отрицательных ветвей s_1, s_2, одной действитель-

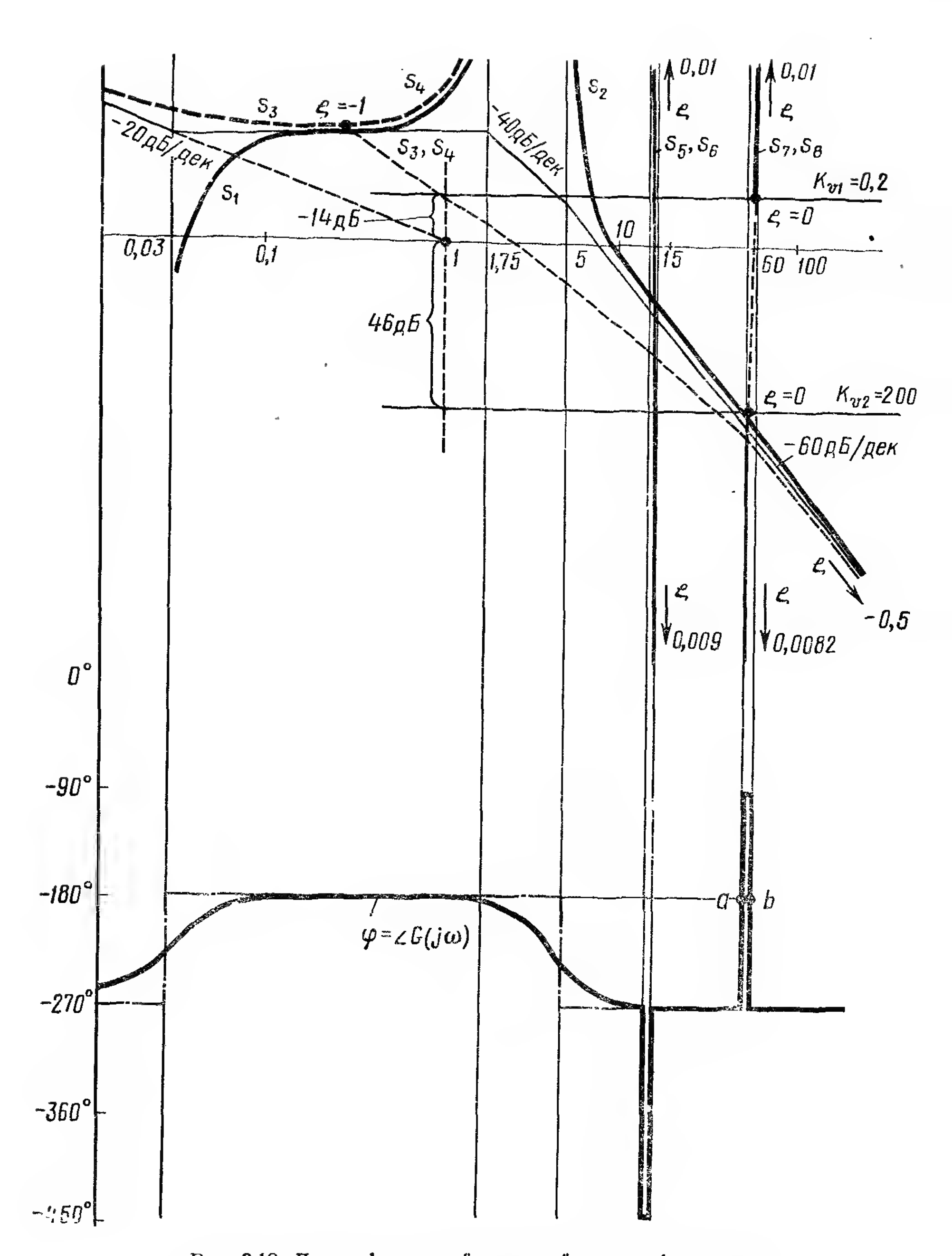


Рис. 6.12. Логарифмический корневой годограф системы

$$G(s)=\frac{K_v\,(32s+1)\,(0{,}063^2s^2+2\cdot0{,}009\cdot0{,}063s+1)\,(0{,}018^2s^2+2\cdot0{,}008\cdot0{,}018s+1)}{s\,(0{,}2s+1)\,(0{,}57s+1)\,(0{,}572s-1)\,(0{,}07^2s^2+2\cdot0{,}01\cdot0{,}07s+1)\times(0{,}017^2s^2+2\cdot0{,}01\cdot0{,}017s+1)}$$

ной положительной ветви $s_3 - s_4$, точка минимума которой служит началом «неустойчивой комплексной ветви s_3, s_4, и двух комплексных ветвей, представляющих соответственно корни s_5, s_6 и s_7, s_8 замкнутой системы. Ветви s_1, s_2, s_3, s_4 порождаются полюсами жесткой ракеты и полюсам сервопривода, а ветви s_5, s_6 и s_7, s_8 — первым и вторым тонами изгибных колебаний.

Отличие разметки комплексных ветвей первого и второго тона по значениям ζ объясняется упомянутой выше неодинаковостью следования постоянных времени числителя и знаменателя в диполях этих тонов: логарифмическая фазовая характеристика $\varphi_1 = \angle W_1(s)^{(\zeta=0)} = \angle W_1(j\omega)$ диполя первого тона представляет собой пик высотой 180°, направленный в сторону отрицательных, а фазовая характеристика второго тона — такой же пик в сторону положительных значений φ. По этой причине возникают пересечения фазовой характеристики разомкнутой системы $\varphi = \angle G(s)^{(\zeta=0)} = \angle G(j\omega)$ с горизонталью 180° в точках a, b, которым на комплексной ветви второго тона соответствуют точки $\zeta = 0$.

Легко видеть, что замкнутая система стабилизации неустойчива при любом коэффициенте усиления K_v по контуру. Неустойчивость обусловливается как полюсами s_3, s_4 жесткой ракеты, так и в диапазоне $K_{v1} < K_v < K_{v2}$ полюсами второго тона изгибных колебаний. Оставляя пока в стороне вопрос о стабилизации жесткой ракеты (вопрос о перемещении корней s_3, s_4 в левую полуплоскость s), рассмотрим, как можно для этого диапазона значений переместить корни s_7, s_8 из правой полуплоскости в левую. Корни s_7, s_8 в правой полуплоскости находиться не будут, если фазовую характеристику $\varphi = \angle G(j\omega)$ в окрестности комплексной частоты $|s| = 1/0{,}017 = 60$ опустить вниз на $\Delta\varphi \geqslant 90°$. Этого можно достигнуть, введя в автомат стабилизации корректирующее звено с передаточной функцией

$$W'_k(s) = K'_k/(T_k s + 1)^2, \qquad (6.22)$$

где $T_k = 0{,}033$ с.

Данное корректирующее звено обусловливает при частотах $|s| = 1/0{,}017 = 60$ и $|s| = 1/0{,}07 = 14{,}3$ фазовые сдвиги $\angle W'_k(j\omega)$ соответственно 126,8° и 53,2°, что обеспечивает устойчивость по второму тону колебаний без нарушения устойчивости по первому тону.

Обратимся теперь к стабилизации жесткой ракеты. Чтобы уменьшить протяженность неустойчивой комплексной ветви s_3, s_4, необходимо создать точки максимума действительной отрицательной ветви, в которой комплексная ветвь s_3, s_4 могла бы окончиться. При этом уровень фазовой характеристики в высокочастотной области (в области частот первого и второго тонов изгибных колебаний) должен быть сохранен, так как в противном случае стабилизирующее действие корректирующего звена (6.22) исчезнет. Эти два условия могут быть, например, реализованы корректирующим звеном

$$W''_k(s) = K''_k(0{,}57s + 1)^2/(0{,}1s + 1)^2. \qquad (6.23)$$

На рис. 6.13 показан ЛКГ замкнутой системы, стабилизированной звеньями (6.22), (6.23). Диапазон устойчивости этой системы $K_{v1} < K_v < K_{v2}$, оказался весьма узким.

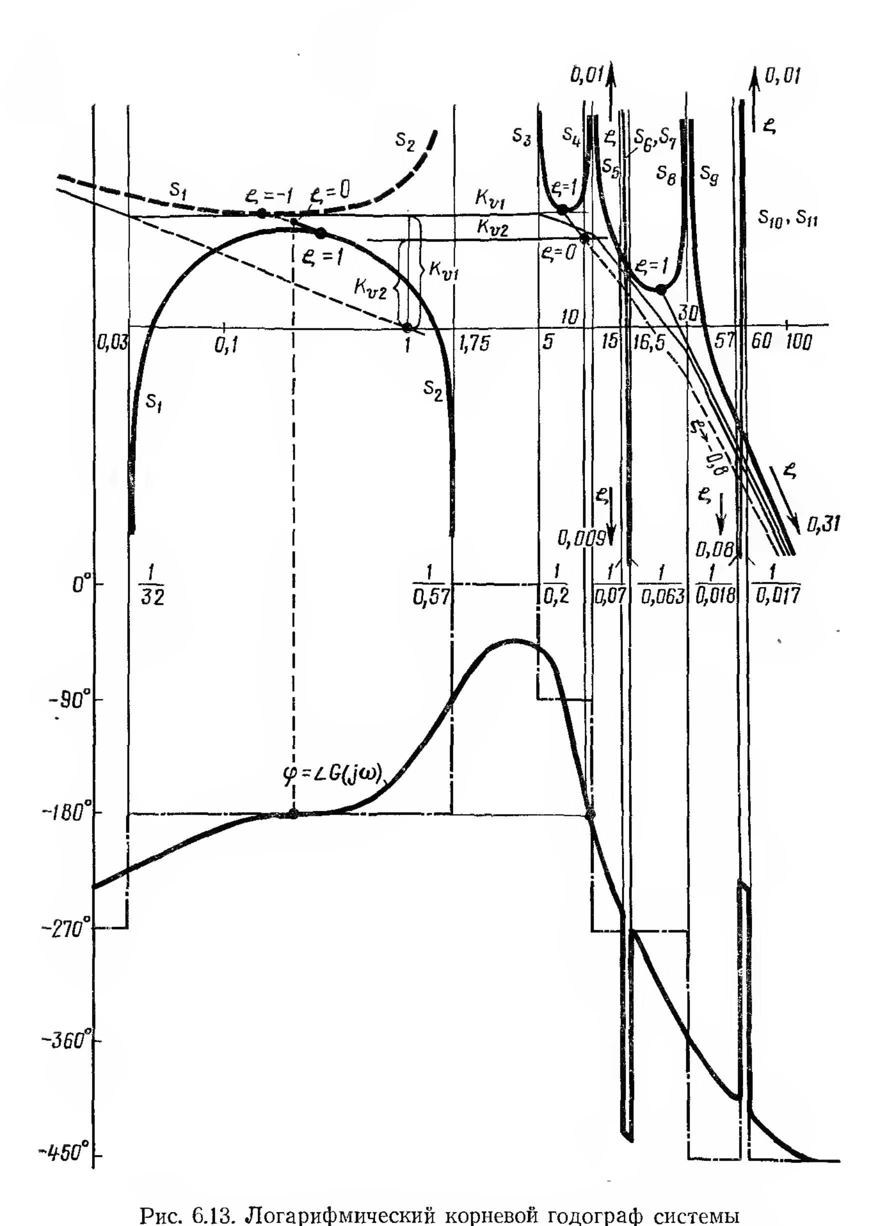


Рис. 6.13. Логарифмический корневой годограф системы

$$G(s) = \frac{K_v\,(32s+1)\,(0{,}57s+1)\,(0{,}063^2s^2+2\cdot 0{,}009\cdot 0{,}063s+1)\times(0{,}018^2s^2+2\cdot 0{,}008\cdot 0{,}018s+1)}{s\,(0{,}2s+1)\,(0{,}572s-1)\,(0{,}1s+1)^2\,(0{,}07^2s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}07s+1)\times(0{,}033s+1)^2\,(0{,}017^2s^2+2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}017s+1)}$$

Относительно полюсов результирующего корректирующего звена

$$W_k(s) = W_k'(s)\,W''(s) = K_k\,(0{,}57s+1)^2/[(0{,}1s+1)^2\,(0{,}033s+1)^2], \qquad (6.24)$$

замкнутая система, как это видно из ЛКГ, достаточно грубая. Поэтому, заменяя двукратные полюсы парами различных, но близких полюсов, приходим к передаточной функции корректирующего звена, которую можно реализовать пассивным RC-четырехполюсником.

§ 6.3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ПО ЛИНИЯМ РАВНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Структура автопилота ЛА иногда бывает уже задана и задача заключается лишь в выборе параметров настройки автопилота, который производится на основе удовлетворения какому-либо критерию качества регулирования. За критерий качества в настоящее время часто принимают относительный коэффициент демпфирования ζ колебательной составляющей переходного процесса, отличающейся от других колебательных составляющих более слабым затуханием, т. е. меньшим значением ζ. Параметры настройки автопилота выбирают из условия придания указанному критерию (относительному коэффициенту демпфирования ζ колебательной составляющей с наименьшим затуханием) наибольшего возможного значения, которое однако не должно превосходить $\zeta_{\text{опт}} = 0{,}7$ (значения ζ, большие $\zeta_{\text{опт}}$, нежелательны, так как обусловливают «вялое» протекание переходного процесса).

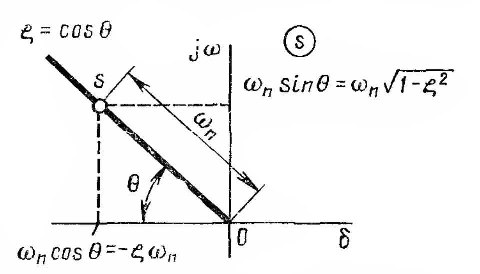


Рис. 6.14. Радиальная прямая ζ, отображаемая на плоскость параметров настройки

Такой выбор параметров можно приближенно произвести, пользуясь методом логарифмического корневого годографа. Однако более точный выбор осуществляется по линиям равных значений относительного коэффициента демпфирования ζ, построенным в плоскости двух параметров настройки (для фиксированных значений остальных параметров).

Линии равных значений ζ в плоскости параметров настройки a_0, a_1 получаются как отображения на эту плоскость радиальных прямых ζ плоскости s, изображенных на рис. 6.1. Изменяющаяся вдоль радиальной прямой ζ (рис. 6.14) независимая переменная

$$s = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \zeta = \text{const}, \quad \omega_n = \text{var}, \qquad (6.25)$$

где ω_n — расстояние текущей точки s до начала координат;

$\zeta = \cos\theta$ — индекс, характеризующий угловое положение прямой.

Подставляя в характеристическое уравнение замкнутой системы выражение независимой переменной (6.25), что соответствует назначению

этому уравнению комплексного корня с параметрами ζ, ω_n, решаем обратную задачу, т. е. задачу определения параметров настройки a_0, a_1, обеспечивающих появление указанного комплексного корня. Процесс отображения радиальной прямой ζ на плоскость a_0, a_1 сводится к этой обратной задаче и, по существу, идентичен хорошо известному в теории автоматического регулирования методу D-разбиения плоскости параметров.

После подстановки выражения (6.25), как и в методе D-разбиения, приравниваем порознь нулю действительную и мнимую части характеристического полинома и из полученной системы двух алгебраических уравнений определяем параметры a_0, a_1 как функции ζ и ω_n:

$$a_0 = F_1(\zeta, \ \omega_n); \quad a_1 = F_2(\zeta, \ \omega_n). \tag{6.26}$$

Зафиксировав ζ, изменяем ω_n от 0 до ∞ и по параметрическим уравнениям (6.26) вычисляем каждый раз координаты точки в плоскости a_0a_1. Упомянутые алгебраические уравнения всегда разрешимы, если в выражения коэффициентов характеристического уравнения параметры a_0, a_1 и их произведения a_0a_1 входят линейно.

Для случая линейной зависимости коэффициентов только от самих параметров a_0, a_1 вычисления можно существенно сократить, если для различных числовых значений ζ заранее рассчитать коэффициенты характеристического уравнения, записанного после подстановки (6.25) по убывающим степеням параметра ω_n. В этой форме записи коэффициенты характеристического уравнения равны коэффициентам A_i исходного характеристического уравнения, умноженным на комплексные числа, действительная α_i и мнимая β_i части которых зависят от ζ.

Для уравнения восьмой степени такой пересчет коэффициентов выполнен (рассчитаны коэффициенты α_i, β_i при значениях ζ, разделенных интервалом 0,01.) Таблица коэффициентов [10] α_i, β_i может использоваться не только для уравнения восьмой степени, но и для любого другого уравнения более низкой степени. Взяв из этой таблицы числовые значения коэффициентов α_i, β_i, соответствующие некоторому значению ζ, строим в плоскости a_0a_1 линию $\zeta = \text{const}$ обычным методом D-разбиения.

Линии равных ζ с нанесенными вдоль них значениями ω_n позволяют судить о распределении комплексных сопряженных корней системы. Чтобы иметь представление о численных значениях всех корней устойчивой линейной системы, необходимо линии ζ дополнить линиями равных значений δ, соответствующими действительным отрицательным корням δ.

Линии равных значений δ строятся аналогичным образом, т. е. путем подстановки $s = \delta$ в характеристическое уравнение, где δ — действительное отрицательное число. Апериодические границы устойчивости принадлежат семейству линий δ, а именно, являются линиями равных значений δ с индексами $\delta = 0$ и $\delta = \pm\infty$.

В качестве примера на рис. 6.15 показаны линии равных значений ζ, построенные в плоскости a_0a_1, где a_0, a_1 — параметры настройки автопилота

$$T_a\dot{\delta} + \delta = a_0\vartheta + a_1\dot{\vartheta}, \tag{6.27}$$

стабилизирующего по углу тангажа жесткую баллистическую ракету, рассматривавшуюся в § 6.2. На этом же рисунке приведена структурная схема системы стабилизации.

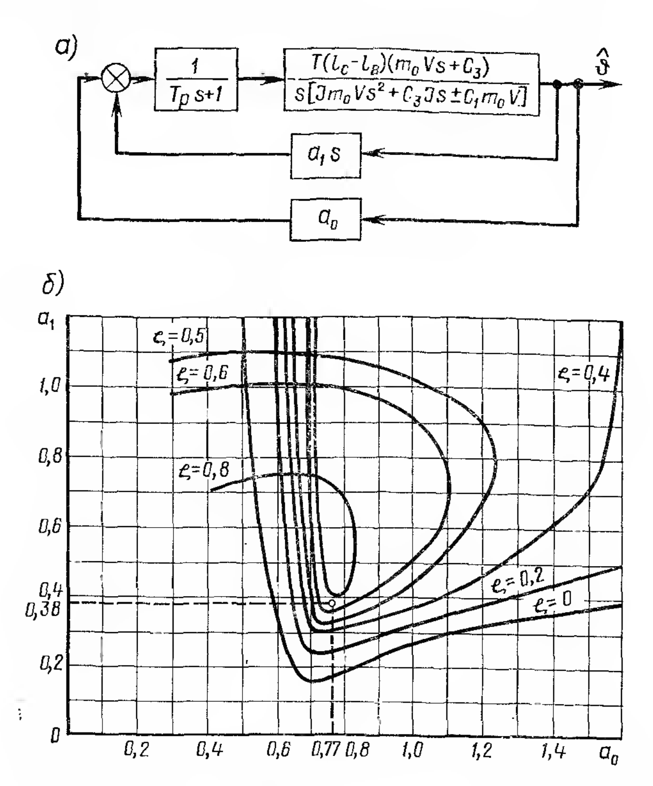


Рис. 6.15. Система стабилизации жесткой ракеты (*а*) и линии равных значений ζ (*б*).

При расчете были приняты цифровые значения параметров (6.11). Тяга T ракетного двигателя и постоянная времени T_a автопилота были взяты

$$T = 1\,520\,000 \text{ Н}; \quad T_a = 0{,}2 \text{ с}. \tag{6.28}$$

Линии равных значений ζ показывают, что за оптимальные можно, например, принять параметры настройки $a_0 = 0{,}77$; $a_1 = 0{,}38$.

§ 6.4. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотренный в предыдущем параграфе метод позволяет при заданной структуре системы выбрать наилучшие с точки зрения относительного демпфирования параметры настройки, если число этих параметров невелико (два или три), а метод ЛКГ (§ 6.2) — синтезировать

корректирующее звено, делающее замкнутую систему устойчивой. Однако с помощью этих методов нельзя придать корням замкнутой системы любое желаемое расположение.

Помещение всех корней замкнутой системы в любые наперед выбранные положения составляет предмет интенсивно разрабатываемой в настоящее время теории модального управления (название обусловливается тем, что корням соответствуют составляющие свободного движения системы, называемые иногда модами).

Если вектор состояния объекта может быть измерен полностью, то обеспечение заданного расположения корней замкнутой системы обычно не вызывает трудности. Однако в большинстве случаев доступны непосредственному измерению лишь некоторые составляющие вектора состояния (неполная информация), поэтому возникает необходимость в устройствах, которые позволили бы оценить остальные составляющие вектора состояния.

В настоящее время известны два подхода косвенного определения составляющих вектора состояния объекта, недоступных прямому измерению. Эти подходы соответственно связаны с применением наблюдающего устройства Калмана (фильтра Калмана), и наблюдающих устройств Льюинбергера.

Известны также методы, позволяющие и при неполной информации о векторе состояния объекта приближать корни замкнутой системы к выбранному расположению. Но независимо от используемого метода возникает вопрос о расположении корней, к которому следует стремиться. Этот вопрос неоднократно рассматривался в литературе, причем в зависимости от принятой точки зрения получаются различные системы стандартных коэффициентов характеристического уравнения.

Метод стандартных коэффициентов. Рассмотрим замкнутую систему, описываемую дифференциальным уравнением,

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = f(t). \tag{6.29}$$

Внешнее воздействие $f(t)$ будем принимать в виде ступенчатой функции величиной a_n, а начальные условия предполагать нулевыми. Чтобы обеспечить «оптимальное» протекание реакции $x(t)$ предлагались различные распределения корней характеристического уравнения

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{6.30}$$

Одно из предложений заключается в обеспечении одинаковости всех корней характеристического уравнения, причем n — кратный корень должен быть действительным отрицательным со значением модуля ω_0, определяемым требованиями к быстродействию системы (чем больше ω_0, тем меньше время регулирования). Тогда левая часть характеристического уравнения обращается в бином Ньютона $(s + \omega_0)^n$, разворачивая который, получаем стандартные (желаемые) значения коэффициентов характеристического уравнения. Для систем до восьмого порядка включительно вид левой части характеристического уравнения (биномиальные стандартные формы) указывается в табл. 6.3.

Таблица 6.3

$$s+\omega_0$$
$$s^2+2\omega_0 s+\omega_0^2$$
$$s^3+3\omega_0 s^2+3\omega_0^2 s+\omega_0^3$$
$$s^4+4\omega_0 s^3+6\omega_0^2 s^2+4\omega_0^3 s+\omega_0^4$$
$$s^5+5\omega_0 s^4+10\omega_0^2 s^3+10\omega_0^3 s^2+5\omega_0^4 s+\omega_0^5$$
$$s^6+6\omega_0 s^5+15\omega_0^2 s^4+20\omega_0^3 s^3+15\omega_0^4 s^2+6\omega_0^5 s+\omega_0^6$$
$$s^7+7\omega_0 s^6+21\omega_0^2 s^5+35\omega_0^3 s^4+35\omega_0^4 s^3+21\omega_0^5 s^2+7\omega_0^6 s+\omega_0^7$$
$$s^8+8\omega_0 s^7+28\omega_0^2 s^6+56\omega_0^3 s^5+70\omega_0^4 s^4+56\omega_0^5 s^3+28\omega_0^6 s^2+8\omega_0^7 s+\omega_0^8$$

На рис. 6.16 приводятся реакции на ступенчатое возмущение систем от первого до восьмого порядка. Для многих приложений эти реакции вследствие относительно медленного протекания нельзя считать оптимальными.

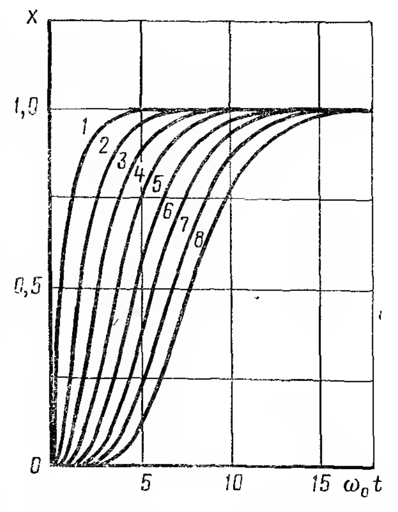


Рис. 6.16. Реакции на ступенчатое воздействие систем с биномиальными коэффициентами

Другое «оптимальное» расположение корней, предложенное Баттервортом, состоит в том, что корни при соблюдении одинаковости угловых расстояний распределяются по полуокружности радиуса ω_0 в левой полуплоскости s. Угол, составленный с мнимой осью радиусом-вектором ближайшего к этой оси корня, равен половине угла между радиусами-векторами соседних корней (рис. 6.17, *а*). С помощью соотношений, связывающих корни с коэффициентами характеристического уравнения (теорема Виета), можно в каждом случае составить выражения стандартных коэффициентов. Левые части характеристических уравнений с такими коэффициентами (стандартные формы Баттерворта) приводятся в табл. 6.4.

Стандартные формы Баттерворта, как и биномиальные стандартные формы, характеризуются симметричным

Таблица 6.4

$$s+\omega_0$$
$$s^2+1,4\omega_0 s+\omega_0^2$$
$$s^3+2,0\omega_0 s^2+2,0\omega_0^2 s+\omega_0^3$$
$$s^4+2,6\omega_0 s^3+3,4\omega_0^2 s^2+2,6\omega_0^3 s+\omega_0^4$$
$$s^5+3,24\omega_0 s^4+5,24\omega_0^2 s^3+5,24\omega_0^3 s^2+3,24\omega_0^4 s+\omega_0^5$$
$$s^6+3,86\omega_0 s^5+7,46\omega_0^2 s^4+9,13\omega_0^3 s^3+7,46\omega_0^4 s^2+3,86\omega_0^5 s+\omega_0^6$$
$$s^7+4,5\omega_0 s^6+10,1\omega_0^2 s^5+14,6\omega_0^3 s^4+14,6\omega_0^4 s^3+10,1\omega_0^5 s^2+4,5\omega_0^6 s+\omega_0^7$$
$$s^8+5,12\omega_0 s^7+13,14\omega_0^2 s^6+21,84\omega_0^3 s^5+25,69\omega_0^4 s^4+21,84\omega_0^5 s^3+13,14\omega_0^6 s^2+$$
$$+5,12\omega_0^7 s+\omega_0^8$$

распределением коэффициентов, что является специфической особенностью всех систем, корни которых расположены в плоскости s на одной и той же окружности (уравнение с биномиальными коэффициентами представляет частный случай, характеризуемый расположением всех корней в одной точке упомянутой окружности).

Реакции систем Баттерворта на ступенчатое воздействие (рис. 6.17, *б*) по сравнению с аналогичными реакциями биномиальных систем, как и следовало ожидать, более колебательны. Но во многих случаях они соответствуют интуитивному представлению об оптимальном переходном процессе.

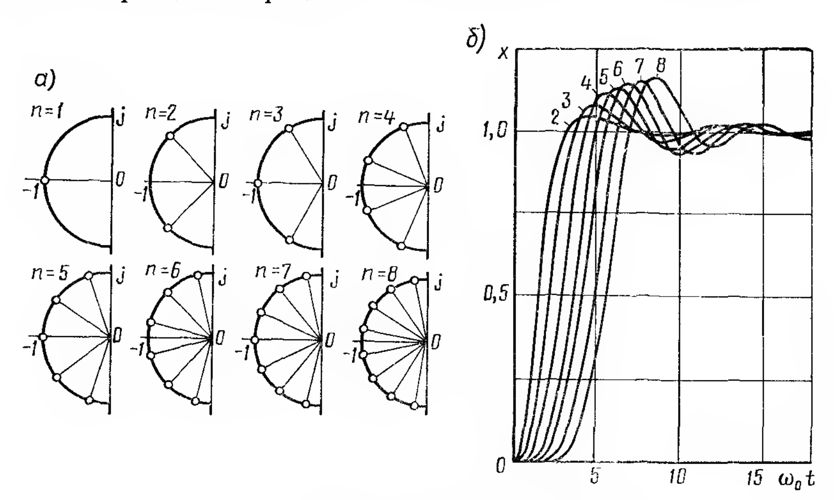


Рис. 6.17. Системы Баттерворта

В настоящее время понятие оптимального переходного процесса связывается с минимизацией какого-либо оптимизирующего функционала. Для системы (6.29) при $f(t) = a_n$ и нулевых начальных условиях простейшим оптимизирующим функционалом является интеграл от квадрата ошибки системы, т. е.

$$I_2 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt = \int_0^\infty [1 - x(t)]^2\,dt. \qquad (6.31)$$

Произведем нормирование уравнения (6.29), для чего коэффициенты при первом и последнем членах подчиним соотношению $a_n = \omega_0^n a_0$ и введем новую независимую переменную

$$\tau = \omega_0 t. \qquad (6.32)$$

Тогда уравнение (6.29) примет вид

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + q_1 \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \ldots + q_{n-1} \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{f}{a_0}, \qquad (6.33)$$

$$\text{где } q_i = a_i / a_0 \omega_0^i. \qquad (6.34)$$

Функционал (6.31) можно получить в виде явной функции коэффициентов q_i*:

$$I_2 = \frac{1}{2\omega_0} F(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}),$$

где

$$F = \frac{\begin{vmatrix} q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-4} & q_{n-6} \cdots \\ -1 & q_{n-1} & q_{n-3} & q_{n-5} \cdots \\ 0 & 1 & q_{n-2} & q_{n-4} \cdots \\ 0 & 0 & q_{n-1} & q_{n-3} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{n-1} & q_{n-3} & q_{n-5} & q_{n-7} \cdots \\ 1 & q_{n-2} & q_{n-4} & q_{n-6} \cdots \\ 0 & q_{n-1} & q_{n-3} & q_{n-5} \cdots \\ 0 & 1 & q_{n-2} & q_{n-4} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}}$$

Минимизируя этот функционал по всем параметрам q_i, находим стандартные формы левой части нормированного уравнения (6.33), а при учете соотношения (6.34) и $a_0 = 1$ — стандартные формы левой части характеристического уравнения (6.30). Для систем от первого до восьмого порядка стандартные формы, доставляющие минимум интегралу от квадрата ошибки, приводятся в табл. 6.5.

Таблица 6.5

$$s + \omega_0$$
$$s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2$$
$$s^3 + \omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3$$
$$s^4 + \omega_0 s^3 + 3\omega_0^2 s^2 + 2\omega_0^3 s + \omega_0^4$$
$$s^5 + \omega_0 s^4 + 4\omega_0^2 s^3 + 3\omega_0^3 s^2 + 3\omega_0^4 s + \omega_0^5$$
$$s^6 + \omega_0 s^5 + 5\omega_0^2 s^4 + 4\omega_0^3 s^3 + 6\omega_0^4 s^2 + 3\omega_0^5 s + \omega_0^6$$
$$s^7 + \omega_0 s^6 + 6\omega_0^2 s^5 + 5\omega_0^3 s^4 + 10\omega_0^4 s^3 + 6\omega_0^5 s^2 + 4\omega_0^6 s + \omega_0^7$$
$$s^8 + \omega_0 s^7 + 7\omega_0^2 s^6 + 6\omega_0^3 s^5 + 15\omega_0^4 s^4 + 10\omega_0^5 s^3 + 10\omega_0^6 s^2 + 4\omega_0^7 s + \omega_0^8$$

Табл. 6.5 легко продолжить и получить стандартные формы для систем выше восьмого порядка. При этом следует руководствоваться тем, что числовые коэффициенты при прохождении строки справа налево определяются формулой $C_p^i = p!/[i!\,(p-i)!]$,

где $p = \begin{cases} (i+n)/2, & \text{если } i+n \text{ четно;} \\ (i+n-1)/2, & \text{если } i+n \text{ нечетно;} \end{cases}$

n и i — соответственно порядок системы и номер члена стандартной формы при отсчете справа налево (крайнему правому члену соответствует $i = 0$).

Корни стандартных полиномов приведены в табл. 6.6. Легко видеть, что параметр ω_0 по-прежнему характеризует быстроту протека-

* Вывод этой формулы здесь не рассматривается.

ния переходного процесса: не влияя на относительный коэффициент демпфирования ζ, параметр ω_0 сокращает (когда велик) или удлиняет (когда мал) длительность переходного процесса. Выбор этого параметра определяется требуемым быстродействием системы и возможностями обеспечения достаточного диапазона ее линейности (чем больше ω_0, тем выше коэффициент усиления K по контуру системы и тем меньше предельное отклонение, при котором наступает насыщение системы).

Таблица 6.6

n	Корни
2	$-0{,}5\omega_0 \pm 0{,}87\omega_0 j$
3	$-0{,}57\omega_0, -0{,}215\omega_0 \pm 1{,}31\omega_0 j$
4	$-0{,}395\omega_0 \pm 0{,}505\omega_0 j,\ -0{,}105\omega_0 \pm 1{,}57\omega_0 j$
5	$-0{,}41\omega_0,\ -0{,}235\omega_0 \pm 0{,}88\omega_0 j,\ -0{,}06\omega_0 \pm 1{,}70\omega_0 j$
6	$-0{,}315\omega_0 \pm 0{,}362\omega_0 j,\ -0{,}155\omega_0 \pm 1{,}50\omega_0 j,\ -0{,}03\omega_0 \pm 1{,}78\omega_0 j$
7	$-0{,}33\omega_0,\ -0{,}22\omega_0 \pm 0{,}665\omega_0 j,\ -0{,}09\omega_0 \pm 1{,}35\omega_0 j,\ -0{,}025\omega_0 \pm 1{,}83\omega_0 j$
8	$-0{,}27\omega_0 \pm 0{,}283\omega_0 j,\ -0{,}15\omega_0 \pm 0{,}91\omega_0 j,\ -0{,}068\omega_0 \pm 1{,}50\omega_0 j,$ $-0{,}013\omega_0 \pm 1{,}86\omega_0 j.$

Реакция на ступенчатое воздействие системы, оптимизированной по квадратичному критерию, по сравнению с реакцией системы Баттерворта, обладает несколько большей колебательностью.

Кроме указанных, известны стандартные формы, получающиеся в результате минимизации оптимизирующего функционала

$$I_3 = \int_0^\infty t\,|e(t)|\,dt, \tag{6.35}$$

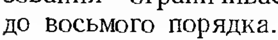
представляющего собой интеграл от произведения абсолютного значения ошибки $|e(t)| = |1 - x(t)|$ на время t. Условия, при которых вычисляется функционал, остаются прежними, т. е. правая часть уравнения (6.29) постоянна, начальные условия нулевые. Эти формы и соответствующие им корни для систем от первого до восьмого порядка приведены соответственно в табл. 6.7 и на рис. 6.18.

Таблица 6.7

$$s+\omega_0$$
$$s^2+1{,}4\omega_0 s+\omega_0^2$$
$$s^3+1{,}75\omega_0 s^2+2{,}15\omega_0^2 s+\omega_0^3$$
$$s^4+2{,}1\omega_0 s^3+3{,}4\omega_0^2 s^2+2{,}7\omega_0^3 s+\omega_0^4$$
$$s^5+2{,}8\omega_0 s^4+5{,}0\omega_0^2 s^3+5{,}5\omega_0^3 s^2+3{,}4\omega_0^4 s+\omega_0^5$$
$$s^6+3{,}25\omega_0 s^5+6{,}60\omega_0^2 s^4+8{,}60\omega_0^3 s^3+7{,}45\omega_0^4 s^2+3{,}95\omega_0^5 s+\omega_0^6$$
$$s^7+4{,}475\omega_0 s^6+10{,}42\omega_0^2 s^5+15{,}08\omega_0^3 s^4+15{,}54\omega_0^4 s^3+10{,}64\omega_0^5 s^2+4{,}58\omega_0^6 s+\omega_0^7$$
$$s^8+5{,}20\omega_0 s^7+12{,}80\omega_0^2 s^6+21{,}60\omega_0^3 s^5+25{,}75\omega_0^4 s^4+22{,}20\omega_0^5 s^3+13{,}3\omega_0^6 s^2+$$
$$+5{,}15\omega_0^7 s+\omega_0^8.$$

Реакции на ступенчатое воздействие систем, оптимизированных по критерию $\int\limits_0^\infty t\,|e(t)|\,dt$ (рис. 6.19), по сравнению с реакциями биномиальной системы характеризуются значительно большим быстродействием, а по сравнению с реакциями систем Баттерворта — меньшей колебательностью.

Стандартные формы согласно табл. 6.7 находят достаточно широкое применение на практике. Однако какого-либо алгоритма составления этих форм не существует (они получены эмпирически с помощью аналоговых моделирующих установок), и, следовательно, область их использования ограничивается системами до восьмого порядка.



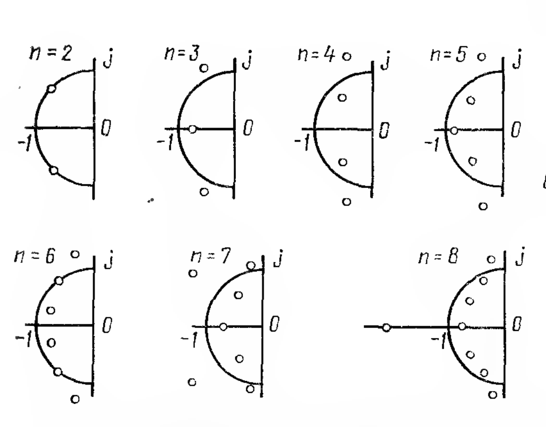


Рис. 6.18. Расположение полюсов системы, оптимизированной по критерию

$$I_3 = \int\limits_0^\infty t\,|e(t)|\,dt$$

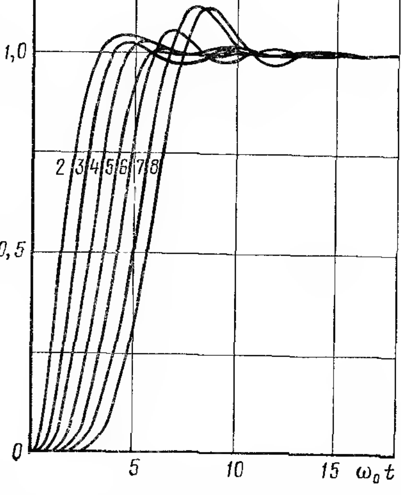


Рис. 6.19. Реакции на ступенчатое воздействие систем, оптимизированных по критерию

$$I_3 = \int\limits_0^\infty t\,|e(t)|\,dt$$

Следует отметить, что характеристические полиномы в табл. 6.3 ÷ ÷ табл. 6.7 не универсальны, так как обеспечивают указанное на рис. 6.16, рис. 6.17 и рис. 6.19 протекание реакций только в случае систем, числитель передаточной функции которых — постоянная величина. Однако и при другом виде числителя эти формы весьма полезны, так как могут служить отправной точкой при отыскании оптимального расположения корней.

Оптимальное расположение корней в общем случае можно, например, установить, оценивая реакции на ступенчатое воздействие при помощи асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики исследуемой системы. Форма асимптотической ЛАХ не только дает представление о влиянии того или иного корня на переходный процесс, но и указывает направление, в котором следует сдвигать корень, чтобы увеличить или уменьшить его влияние [10].

Управление корнями при наличии полной информации. Рассмотрим линейный стационарный объект

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \qquad (6.36)$$

Термин «объект» здесь следует воспринимать в более широком смысле, чем это обычно принято в теории автоматического регулирования. А именно, к объекту относятся также исполнительные органы и предшествующие им усилители (входные сигналы усилителей образуют вектор $\mathbf{u}$). К объекту следует относить и чувствительные элементы, принимая их выходные сигналы в качестве составляющих выходного вектора объекта.

Здесь и в дальнейшем все векторы и матрицы предполагаем состоящими из действительных элементов. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют соответственно размеры $n \times n$ и $n \times m$, n — вектор $\mathbf{x}$ представляет состояние объекта, а m — вектор $\mathbf{u}$ — внешние воздействия (например, в случае ЛА — входные сигналы рулевых приводов).

Введем в рассмотрение замкнутую систему, добавляя к уравнению объекта (6.36) уравнение регулятора

$$\mathbf{u} = -\mathbf{P}\mathbf{x}, \qquad (6.37)$$

где $\mathbf{P}$ — матрица типа $m \times n$.

Закон регулирования (6.37) может быть сформирован лишь в том случае, если в распоряжении имеется информация о всех составляющих x_i вектора состояния объекта $\mathbf{x}$ (полная информация). Объединяя уравнения (6.36) и (6.37), получим следующее уравнение замкнутой системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P})\,\mathbf{x}(t). \qquad (6.38)$$

В практических задачах матрицу $\mathbf{P}$ обычно необходимо выбрать таким образом, чтобы придать матрице $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}$ требуемые свойства, например, заранее предписанное расположение собственных значений. Собственными значениями называются корни характеристического уравнения системы поэлементных уравнений, получающейся из матричного уравнения (6.38). Интуитивно достаточно ясно, что возможность такого выбора зависит от управляемости объекта по состоянию $\mathbf{x}$ в отношении входного сигнала $\mathbf{u}$. Это предположение подтверждается и строгими (здесь не приводимыми) доказательствами. Доказано, что условием свободного управления положением корней (собственных значений) замкнутой системы (6.38) является полная управляемость объекта (6.36).

Полная управляемость означает существование ограниченного входного сигнала $\mathbf{u}$, переводящего объект за конечный интервал времени из любого начального состояния $\mathbf{x}_0$ в любое наперед заданное состояние $\mathbf{x}$, и ее условием является равенство ранга матрицы управляемости

$$\mathbf{Q}_y = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \qquad (6.39)$$

порядку системы n.

В выражении (6.39) матрица $\mathbf{Q}_y$ записана в блочной форме. Если элементы-блоки **B**, **AB**, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ записать в развернутой форме, то матрица $\mathbf{Q}_y$ станет прямоугольной типа $n \times mn$. *Рангом* матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля определителей, которые можно составить из строк и столбцов (или их соответственных частей) исследуемой матрицы.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда объект имеет только один входной сигнал (например, ЛА с одним управляющим органом). Тогда в уравнении (6.36) вместо вектора **u** будет фигурировать скалярная величина u, а вместо матрицы **B** типа $n \times m$ — матрица-столбец **b** типа $n \times 1$. В законе регулирования (6.37) и в уравнении замкнутой системы (6.38) прямоугольная матрица **P** переходит в матрицу-строку **p**, состоящую из n элементов.

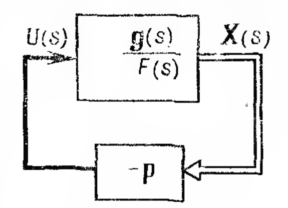


Рис. 6.20. Структурная схема замкнутой системы с матричной формой записи передаточных функций

Если в области изображений по Лапласу уравнение (6.36) разрешить относительно **X** (s), то получим следующую матричную передаточную функцию объекта:

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{X}(s)/U(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}. \qquad (6.40)$$

После записи обратной матрицы в развернутой форме и перемножения с матрицей **b** эта передаточная функция принимает вид

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{g}(s)/F(s), \qquad (6.41)$$

где **g** (s) — матрица-столбец $n \times 1$;

$$F(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \qquad (6.42)$$

— характеристический полином объекта управления.

Структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 6.20. Характеристическое уравнение этой системы получается приравниванием нулю суммы из произведения передаточных функций по контуру, взятого со знаком минус, и единицы. В данном случае

$$\mathbf{p}\frac{\mathbf{g}}{F(s)} + 1 = 0, \qquad (6.43)$$

где порядок следования матричных сомножителей взят таким, чтобы произведение было скалярной величиной. Приводя левую часть (6.43) к общему знаменателю и обозначая получившийся числитель через $H(s)$, приходим к соотношению

$$\mathbf{pg} = H(s) - F(s), \qquad (6.44)$$

где $\mathbf{pg} = \sum_{i=1}^{n} p_i g_i$ — скалярное произведение матрицы-столбца в числителе передаточной функции объекта и матрицы-столбца $\mathbf{p}'$, характеризующего передаточные свойства цепи обратной связи (штрих обозначает операцию транспонирования).

Соотношение (6.44) позволяет достаточно просто находить структуру и параметры закона регулирования $\mathbf{u}=-\mathbf{px}$, обеспечивающего желаемое расположение корней замкнутой системы: выбираем в качестве $H(s)$ какую-либо из приведенных в предыдущем разделе стандартных форм характеристического полинома, вычисляем характеристический полином $F(s)$ объекта управления и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой частях уравнения (6.44), образуем систему алгебраических уравнений. Эта система легко разрешается относительно элементов p_i матрицы-строки $\mathbf{p}$, характеризующей искомый закон регулирования.

Изложенный метод синтеза можно распространить и на системы с несколькими входными сигналами.

Пример. Пусть ЛА и рулевая машинка, образующие объект управления, описываются уравнениями:

$$\ddot{\psi}+C_1\psi=-C_2\delta, \qquad (6.45)$$

$$T\dot{\delta}+\delta=Ku.$$

Введя переменные состояния

$$x_1=\delta,\quad x_2=\dot{\psi},\quad x_3=\psi,$$

получим матричное уравнение объекта

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}u, \qquad (6.46)$$

где $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ -C_2 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} \frac{K}{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Пусть в числовом виде

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (6.47)$$

Матрица управляемости объекта

$$\mathbf{Q}_\text{у}=[\mathbf{b}\,\vdots\,\mathbf{A}\mathbf{b}\,\vdots\,\mathbf{A}^2\mathbf{b}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

имеет ранг, равный порядку объекта ($n=3$), так что объект полностью управляем и соответствующим выбором закона регулирования $u=-\mathbf{px}$ можно корням замкнутой системы придать любое желаемое расположение.

Передаточная функция объекта от входа u к вектору состояния $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\frac{\mathbf{X}(s)}{U(s)}=\mathbf{W}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=\frac{1}{(s+1)(s^2+2)}\begin{bmatrix} s^2+2 \\ -s \\ -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{F(s)}\mathbf{g}(s). \qquad (6.48)$$

Пусть за счет введения обратной связи $u=-\mathbf{px}$ необходимо сделать все корни замкнутой системы одинаковыми и равными $-\omega_0$.

Тогда

$$H(s)=s^3+3\omega_0 s^2+3\omega_0^2 s+\omega_0^3. \qquad (6.49)$$

Учитывая (6.48) и (6.49), можно соотношение (6.44) переписать в следующей форме:

$$p_1(s^2+2)-p_2 s-p_3=s^3+3\omega_0 s^2+3\omega_0^2 s+\omega_0^3-[s^3+s^2+2s+2].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, образуем систему алгебраических уравнений:

$$p_1=3\omega_0-1; \quad -p_2=3\omega_0^2-2; \quad p_1-p_3=\omega_0^3-2.$$

Разрешая эту систему относительно элементов матрицы-строки $\mathbf{p}=[p_1, p_2, p_3]$, находим

$$p_1=3\omega_0-1, \quad p_2=-3\omega_0^2+2, \quad p_3=-\omega_0^3+6\omega_0. \qquad (6.50)$$

Таким образом, искомый закон регулирования

$$u=-(p_1 x_1+p_2 x_2+p_3 x_3),$$

где коэффициенты p_i определяются выражениями (6.50).

§ 6.5. НАБЛЮДАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО КАЛМАНА

Изложенный в предыдущем параграфе метод управления корнями может быть использован, когда все переменные состояния x_i объекта (составляющие вектора состояния $\mathbf{x}$) поддаются измерению. Если непосредственное измерение возможно лишь для части переменных состояния, то с целью применения указанного метода необходимо каким-либо другим способом получить информацию о недостающих переменных состояния.

Как уже отмечалось, один из способов получения такой информации состоит в использовании наблюдающегося устройства Калмана (фильтра Калмана). В этом случае детерминированный подход заменяется стохастическим, так как преимущество фильтра Калмана состоит в том, что он оценивает переменные состояния с учетом случайных воздействий на входе объекта и фильтрует измерительный шум (случайные ошибки измерения) на входе.

Рассмотрим объект:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}(u+v); \quad \mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{w}. \qquad (6.51)$$

Здесь $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{C}$ — матрицы соответственно типа $n\times n$, $n\times 1$, $r\times n$; $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — n и r — векторы.

Вектор $\mathbf{x}$, как и ранее, характеризует состояние объекта, а вектор $\mathbf{y}$ — выполняет роль выходного сигнала объекта. Элементы этого вектора формируются при помощи $(r\times n)$-матрицы $\mathbf{C}$ как линейные комбинации переменных состояния x_i.

Предполагается, что составляющие выходного вектора $\mathbf{y}$ доступны измерению, причем случайные ошибки измерений образуют r-вектор $\mathbf{w}$. Предполагается также, что на скалярный входной сигнал u наложена помеха v. Задача заключается в том, чтобы по результатам измерения выходного вектора $\mathbf{y}$ (он имеет размерность r) оценить весь вектор состояния $\mathbf{x}$, т. е. все n переменных состояния.

Пусть v и $\mathbf{w}$ — некоррелированные стационарные случайные гауссовы процессы типа «белый шум» с нулевыми средними значениями. Корреляционные функции этих процессов имеют вид

$$R_{vv} = q\delta(\tau); \tag{6.52а}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ww}} = \mathbf{P}\delta(\tau), \tag{6.52б}$$

где $\delta(\tau)$ — единичная импульсная функция; $q > 0$; $\mathbf{P}$ — матрица типа $r \times r$, симметричная относительно главной диагонали. Тогда указанная выше задача решается наблюдающим устройством Калмана, выходной сигнал $\hat{\mathbf{x}}$ которого является наилучшей (в смысле среднеквадратического отклонения) оценкой вектора состояния объекта $\mathbf{x}$. Наблюдающее устройство Калмана (фильтр Калмана) описывается уравнением [27]

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}[\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}] + \mathbf{b}u, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = 0. \tag{6.53}$$

В этом уравнении

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_0\mathbf{C}'\mathbf{P}^{-1} \tag{6.54}$$

где $\mathbf{R}_0$ — решение матричного алгебраического уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0\mathbf{A}' - \mathbf{R}_0\mathbf{C}'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}_0 + q\mathbf{b}\mathbf{b}' = 0 \tag{6.55}$$

уравнение Рикатти для установившегося состояния).

Фильтр Калмана асимптотически устойчив, так как собственные значения матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{KC})$ обычно имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, вся замкнутая система управления в целом описывается следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(u + v); \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{w}; \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{KC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b}u; \\ u &= -\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

Докажем теперь, что корни замкнутой системы совпадают с собственными значениями матриц $(\mathbf{A} - \mathbf{bp})$ и $(\mathbf{A} - \mathbf{KC})$. Вводя вместо переменных $\mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{x}}$ переменные $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, преобразуем уравнения (6.56) к виду

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{bp})\mathbf{x} + \mathbf{bpe}; \\ \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{KC})\mathbf{e}. \end{aligned}\right\} \tag{6.57}$$

Внешние воздействия v, $\mathbf{w}$ не оказывают влияния на корни и здесь опущены.

Система уравнений (6.57) имеет треугольную матрицу

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{bp} & \mathbf{bp} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{KC} \end{bmatrix},$$

откуда следует, что характеристический полином этой системы

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{p})\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{K}\mathbf{C})$$

имеет корни, совпадающие с собственными значениями упомянутых матриц. Данный результат показывает, что если дело идет о процессе

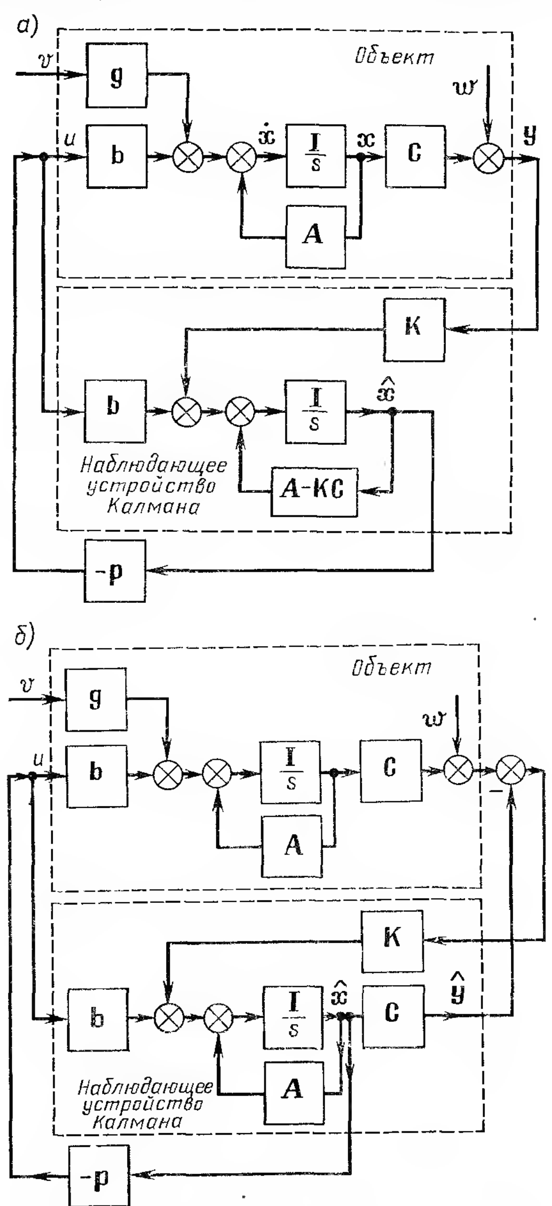


Рис. 6.21. Замкнутая система, содержащая наблюдающее устройство Калмана

смещения корней замкнутой системы к предписанным значениям, то наблюдающее устройство никак не нарушает этого процесса, а просто добавляет к имеющимся корням системы свои корни.

Как уже отмечалось, вещественные части собственных значений матрицы фильтра Калмана (**A** — **KC**) отрицательны. Что касается замкнутой системы управления, то ее устойчивость и требуемое качество достигаются соответствующим выбором матрицы **p**, определяющей закон регулирования (см. § 6.4).

Структурная схема замкнутой системы с наблюдающим устройством Калмана показана на рис. 6.21, *а*. Эта структурная схема соответствует уравнениям (6.56). Отличие состоит лишь в том, что сигнал помехи v проходит через звено $\mathfrak{g}$ (а не через звено $\mathfrak{b}$, как в уравнениях). Этот сигнал получается приведением с помощью структурных преобразований действующего на объект случайного возмущения v к входу внутреннего замкнутого контура, так что передаточные функции $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{g}$ не обязательно одинаковы. В данном случае матричный коэффициент **K** фильтра Калмана должен вычисляться при помощи уравнения (6.55) после замены в нем n-вектора $\mathfrak{b}$ на n-вектор $\mathfrak{g}$.

Производя эквивалентные преобразования, можно структурную схему представить в виде, показанном на рис. 6.21, *б*. Из этой схемы ясно, что фильтр Калмана представляет собой не что иное, как модель наблюдаемого объекта, дополненную звеном **K**. Основная трудность в создании фильтра Калмана заключается как раз в определении коэффициента **K**, зависящего от параметров корреляционных функций стационарных случайных помех, накладываемых на входной и выходной сигналы объекта.

§ 6.6. НАБЛЮДАЮЩИЕ УСТРОЙСТВА ЛЬЮИНБЕРГЕРА

В детерминированной постановке задача оценки всех переменных состояния объекта может быть решена с помощью более простого, чем фильтр Калмана, устройства, называемого наблюдающим устройством Льюинбергера [28]. Входными сигналами наблюдающего устройства служат доступные измерению выходные сигналы объекта, а также поступающие на объект входные сигналы.

Наблюдающее устройство Льюинбергера представляет собой динамическую систему, характеристики которой в известной степени могут выбираться произвольно. Вектор состояния этого устройства линейно связан с вектором состояния наблюдаемого объекта и служит в качестве оценки последнего.

Общая теория. Рассмотрим сначала задачу наблюдения свободного объекта S_1, т. е. объекта, входной сигнал которого равен нулю. Если имеющиеся в распоряжении выходы этого объекта используются в качестве входов линейной системы S_2, то система почти всегда может служить в качестве наблюдающего устройства объекта S_1 в том смысле, что ее состояние отслеживает линейное преобразование вектора состояния объекта (рис. 6.22).

Математически это выражается следующим образом. Пусть S_1 — свободный объект

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \qquad (6.58)$$

воздействующий на систему S_2

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{H}\mathbf{x}(t). \qquad (6.59)$$

Предположим, что существует матрица преобразования **T**, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{H}. \qquad (6.60)$$

Тогда при $\mathbf{z}(0) = \mathbf{Tx}(0)$ имеет место $\mathbf{z}(t) = \mathbf{Tx}(t)$ для всех $t > 0$ или в более общем случае, когда $\mathbf{z}(0) \neq \mathbf{Tx}(0)$,

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Tx}(t) + e^{\mathbf{F}t}[\mathbf{z}(0) - \mathbf{Tx}(0)]. \qquad (6.61)$$

При отрицательности собственных значений матрицы **F** свободные колебания наблюдающего устройства, выражаемые вторым членом (6.61), затухают и вектор состояния $\mathbf{z}(t)$ данного устройства сходится к вектору $\mathbf{Tx}(t)$.

Рис. 6.22. Простое наблюдающее устройство

Это доказывается следующим образом. Умножая слева уравнение (6.58) на **T** и вычитая из уравнения (6.59), получим $\dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Fz}(t) + \mathbf{Hx}(t) - \mathbf{TAx}(t)$. Подставляя вместо **H** выражение (6.60), приходим к уравнению

$$\dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{z}(t) - \mathbf{Tx}(t)],$$

решением которого является (6.61).

Можно доказать, что уравнение (6.60) имеет единственное решение **T**, если у матриц **A** и **F** нет общих собственных значений. Таким образом, некоторая система S_2, корни которой отличны от корней объекта S_1, может служить для этого объекта наблюдающим устройством. Следует отметить, что порядок систем S_1 и S_2 не обязательно должен быть одинаковым.

Не представляет труда получить наблюдающее устройство и для возмущенного объекта, т. е. объекта с ненулевым входным сигналом $\mathbf{u}(t)$. С этой целью необходимо входной сигнал $\mathbf{u}(t)$ подвести также к наблюдающему устройству. Действительно, если объект S_1 описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t), \qquad (6.62)$$

то уравнение дополненного указанным образом наблюдающего устройства

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Fz}(t) + \mathbf{Hx}(t) + \mathbf{TBu}(t) \qquad (6.63)$$

будет по-прежнему иметь в качестве решения выражение (6.61). Отсюда следует, что наблюдающее устройство для возмущенного объекта можно синтезировать, полагая сначала объект свободным, а затем добавляя входной сигнал, как это указано в (6.63).

Наблюдающее устройство идентификации. Это наблюдающее устройство характеризуется тем, что матрица преобразования **T**, связы-

вающая вектор состояния наблюдающего устройства с вектором состояния наблюдаемого объекта, суть единичная матрица **I**, т. е. в установившемся режиме $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$.

Подставляя $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ в (6.60), находим $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H}$, откуда следует, что наблюдающее устройство S_2 имеет в данном случае тот же порядок, что и наблюдаемый объект S_1.

Свойства наблюдающего устройства (матрица **F**) зависят от выбора матрицы **H**. Матрица **H** определяется как порядком измеряемого вектора **y** выходных сигналов объекта, так и структурой входа наблюдающего устройства. Если объект с r-мерным выходом **y** описывается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t); \tag{6.64а}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{6.64б}$$

а наблюдающее устройство — уравнением

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}(t), \tag{6.65}$$

то $\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{C}$. При синтезе наблюдающего устройства $(r \times n)$-матрица **C** фиксирована, а $(n \times r)$-матрица **G** произвольна. Следовательно, наблюдающее устройство идентификации S_2 однозначно определяется выбором матрицы **G** и описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\,\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}(t). \tag{6.66}$$

Собственные колебания наблюдающего устройства S_2 зависят от собственных значений матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$. Следовательно, матрицу **G** необходимо выбрать так, чтобы придать собственным значениям матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$ заранее предписанные значения (в любом случае вещественные части собственных значений должны быть отрицательны).

Можно доказать (доказательство здесь не приводится), что при действительных матрицах **C** и **A** собственные значения матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$ выбором **G** могут быть сделаны равными собственным значениям любой наперед заданной $(n \times n)$-матрицы тогда и только тогда, когда свободная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t);$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

т. е. рассматриваемый объект полностью наблюдаем*.

Полная наблюдаемость системы (**C**, **A**) означает возможность определения начального состояния $\mathbf{x}_0$ этой системы по ее выходному сигналу $\mathbf{y}(t)$, известному на некотором конечном интервале t (началу интервала соответствует $\mathbf{x}_0$), и ее признаком является равенство ранга матрицы наблюдаемости

$$\mathbf{Q}_{\text{Н}} = [\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid (\mathbf{A}')^2\mathbf{C}' \mid \ldots \mid (\mathbf{A}')^{n-1}\mathbf{C}'] \tag{6.67}$$

порядку n системы.

---

* Для краткости эта система будет обозначаться в дальнейшем как система (**C**, **A**).

Если объект S_1 удовлетворяет условию (6.67), то корни наблюдающего устройства S_2, как уже отмечалось, можно поместить в любые желаемые положения. Обычно матрица **G** выбирается такой, чтобы собственные значения матрицы **A** — **GC** (корни наблюдающего устройства) были несколько более отрицательными, чем корни замкнутой системы, состоящей из объекта S_1 и регулятора, формирующего по выходному сигналу наблюдающего устройства закон регулирования.

Структурная схема наблюдающего устройства идентификации аналогична структурной схеме наблюдающего устройства Калмана и получается заменой на рис. 6.21, *а* матрицы **K** на матрицу **G**. Несмотря на внешнее сходство, между этими наблюдающими устройствами имеется отличие по существу. Отличие состоит в том, что собственные значения матрицы **A** — **KC** фильтра Калмана определяются характеристиками шумовых помех, тогда как собственные значения матрицы **A** — **GC** наблюдающего устройства Льюинберга остаются на усмотрение конструктора.

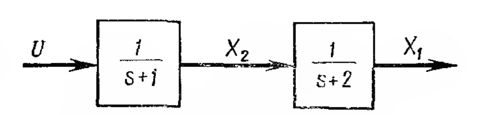


Рис. 6.23. Объект второго порядка

Пример. Рассмотрим объект, структурная схема которого показана на рис. 6.23. Записывая согласно структурной схеме дифференциальные уравнения отдельных звеньев, получим следующие уравнения объекта в переменных состояния:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \qquad (6.68а)$$

$$y = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \qquad (6.68б)$$

Поскольку выход объекта $y = x_1$ — скалярная величина, матрица **G**, характеризующая вход наблюдающего устройства идентификации, должна быть типа (2×1), т. е. $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$.

Тогда матрица этого наблюдающего устройства

$$\mathbf{A} - \mathbf{GC} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -2-g_1 & 1 \\ -g_2 & -1 \end{bmatrix},$$

а характеристический полином

$$\det (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}) = s^2 + (3 + g_1)\, s + 2 + g_1 + g_2. \qquad (6.69)$$

Предположим, что для наблюдающего устройства желателен двукратный корень — 3. В этом сучае желаемый характеристический полином этого устройства

$$(s+3)^2 = s^2 + 6s + 9. \qquad (6.70)$$

Приравнивая коэффициенты (6.69) соответственным коэффициентам (6.70), находим $g_1 = 3$, $g_2 = 4$. Следовательно, наблюдающее устройство идентификации описывается уравнением

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Редуцированное наблюдающее устройство. Рассмотренное выше наблюдающее устройство идентификации обладает некоторой степенью избыточности. Избыточность выражается в том, что наблюдающее устройство оценивает весь вектор состояния объекта $\mathbf{x}(t)$, несмотря на то, что часть этого вектора можно определить и по результатам непосредственного измерения выходного сигнала $\mathbf{y}$. Эту избыточность можно устранить путем синтеза редуцированного наблюдающего устройства, т. е. устройства, порядок которого более низок, чем порядок наблюдаемого объекта.

Если вектор $\mathbf{y}(t)$ выходных сигналов объекта имеет размерность r, то для оценки всего n-мерного вектора состояния объекта $\mathbf{x}(t)$ достаточно синтезировать наблюдающее устройство порядка $n-r$, характеризуемое вектором состояния $\mathbf{z}(t)$ размерности $n-r$. Пусть $\mathbf{T}$ — матрица типа $(n-r)\times n$, преобразующая вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{z}$. Тогда оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ всего вектора $\mathbf{x}(t)$ можно получить из уравнения $\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \cdots\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Решая это уравнение относительно $\hat{\mathbf{x}}(t)$, находим

$$\hat{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \cdots\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}, \qquad (6.71)$$

где в правой части фигурирует измеряемый вектор $\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}$.

Редуцированное наблюдающее устройство можно синтезировать следующим образом. Пусть объект описывается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t); \qquad (6.72а)$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t). \qquad (6.72б)$$

Не теряя в общности, предположим, что r выходов объекта линейно независимы. Это эквивалентно тому, что матрица $\mathbf{C}$ имеет ранг r. Вследствие возможности соответствующей замены переменных матрицу $\mathbf{C}$ примем в виде $\mathbf{C}=[\mathbf{I}\ \vdots\ \mathbf{O}]$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица типа $r\times r$, а $\mathbf{O}$ — матрица типа $r\times(n-r)$, все элементы которой равны нулю. Замену переменных можно осуществить, выбирая такую матрицу $\mathbf{D}$ типа $(n-r)\times n$, что матрица $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{D}\end{bmatrix}$ получается неособой. Матрица $\mathbf{M}$ используется затем для преобразования вектора состояния $\mathbf{x}$ в новый вектор $\bar{\mathbf{x}}$ согласно формуле $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{M}\mathbf{x}$. Подставляя $\mathbf{x}=\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{x}}$ в уравнения (6.72), получим новые матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ в требуемой форме.

Тогда вектор состояния объекта

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{y}\\ \mathbf{w}\end{bmatrix}, \qquad (6.73)$$

где $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$ — векторы с размерностями r и $n-r$. Действительно, уравнение $\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$, переписываемое в этом случае как $\mathbf{y}=[\mathbf{I}\ \vdots\ \mathbf{O}]\begin{bmatrix}\mathbf{y}\\ \mathbf{w}\end{bmatrix}$, не

лишено смысла и просто означает, что $\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Представляя матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в блочной форме

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{A}_{11}$ — матрица типа $r \times r$, и учитывая (6.73), можно уравнение (6.72а) записать как систему двух уравнений:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t); \qquad (6.74а)$$

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t). \qquad (6.74б)$$

Идея синтеза наблюдающего устройства заключается в следующем. Выходной вектор объекта $\mathbf{y}(t)$ доступен измерению, так что путем дифференцирования можно получить его производную $\dot{\mathbf{y}}(t)$. Так как вектор входных воздействий $\mathbf{u}(t)$ также является измеряемым, из уравнения (6.74а) находим вектор $\mathbf{A}_{12}\mathbf{w}(t)$, который можно рассматривать как измеряемый выходной вектор системы (6.74б).

Система (6.74б) характеризуется вектором состояния $\mathbf{w}(t)$, представляющим собой не поддающуюся непосредственному измерению часть вектора состояния объекта $\mathbf{x}(t)$, и имеет в качестве внешнего воздействия $\mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)$. Вектор $\mathbf{w}(t)$ можно оценить с помощью наблюдающего устройства идентификации системы (6.74б).

Можно доказать, что если система $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ полностью наблюдаема, то полностью наблюдаема и подсистема $(\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{22})$. Отсюда вытекает возможность синтеза для этой подсистемы, т. е. для системы (6.74б), наблюдающего устройства идентификации порядка $n - r$ с любыми желаемыми значениями корней.

Как уже отмечалось, за выходной сигнал системы (6.74б) принят сигнал $\mathbf{A}_{12}\mathbf{w}(t)$. Этот сигнал аналогичен сигналу (6.64б), причем матрица $\mathbf{A}_{12}$ выполняет ту же роль, что и матрица $\mathbf{C}$. Поскольку синтезируется наблюдающее устройство идентификации, пользуемся общим уравнением (6.66) этого устройства. Подставляя в (6.66) вместо $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ соответственно $\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{A}_{12}$ и $\mathbf{L}$ и учитывая, что в наблюдаемой системе (6.74б) роль выходного сигнала $\mathbf{y}_1$ выполняет сигнал $\mathbf{A}_{12}\mathbf{w} = \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) - \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t)$, получим следующее уравнение наблюдающего устройства идентификации $(n - r)$-го порядка:

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}(t) = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\hat{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{L}[\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) - \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t)] + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t). \qquad (6.75)$$

В этом уравнении, как и должно быть, учтен внешний сигнал $\mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)$, прикладываемый к наблюдаемой системе. Путем выбора матрицы $\mathbf{L}$ можно корням наблюдающего устройства (6.75) придать любые желаемые значения.

Структурная схема наблюдающего устройства, составленная по уравнению (6.75), показана на рис. 6.24. Дифференцирования вектора $\mathbf{y}$ можно избегнуть, если точку суммирования *1* перенести со входа интегратора на его выход. В результате получается окончатель-

ная структурная схема редуцированного наблюдающего устройства, показанная на рис. 6.25. Этой схеме соответствует уравнение

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=(\mathbf{A}_{22}-\mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\,\mathbf{z}(t)+(\mathbf{A}_{22}-\mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\,\mathbf{L}\mathbf{y}(t)+ \\ +(\mathbf{A}_{21}-\mathbf{L}\mathbf{A}_{11})\,\mathbf{y}(t)+(\mathbf{B}_2-\mathbf{L}\mathbf{B}_1)\,\mathbf{u}(t), \qquad (6.76)$$

где $\mathbf{z}(t)=\hat{\mathbf{w}}(t)-\mathbf{L}\mathbf{y}(t)$ — суть $(n-r)$ — вектор состояния наблюдающего устройства, а $\hat{\mathbf{w}}(t)$ — его выходной вектор.

Следует отметить, что помимо изложенного возможны и другие способы синтеза редуцированного наблюдающего устройства.

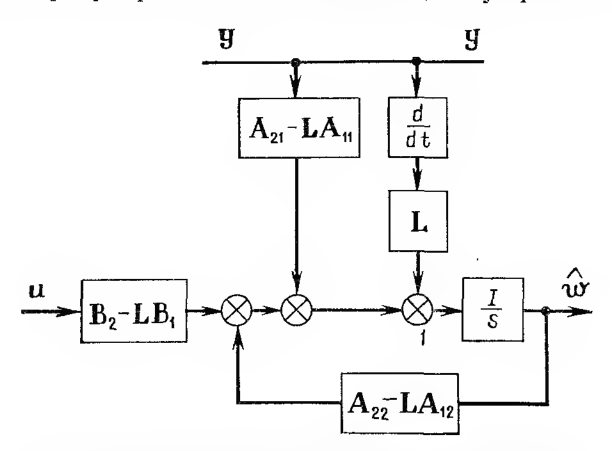


Рис. 6.24. Редуцированное наблюдающее устройство идентификации, использующее производные

Пример. Продолжим рассмотрение объекта, показанного на рис. 6.23. Этот объект представляет собой систему второго порядка с одним выходным сигналом x_1, который будем предполагать измеряемым. Для получения измеримой оценки второй переменной состояния x_2 произведем синтез редуцированного наблюдающего устройства первого порядка.

Матрица **C** уже имеет требуемую форму $\mathbf{C}=[1,\ 0]$ — см. (6.68 б). На основании (6.68 а) находим $A_{11}=-2$, $A_{12}=1$; $A_{21}=0$, $A_{22}=-1$, $B_1=0$, $B_2=1$.

Придадим наблюдающему устройству собственное значение — 3, для чего необходимо положить $\mathbf{L}=2$. Принимая схему наблюдающего устройства, показанную на рис. 6.25, находим для звеньев этой схемы следующие передаточные функции:

$$B_2-\mathbf{L}B_1=1;\quad A_{21}-\mathbf{L}A_{11}=4;\quad A_{22}-\mathbf{L}A_{12}=-3.$$

Учитывая, что в принятой схеме наблюдающего устройства роль сигнала y выполняет измеряемый выходной сигнал объекта x_1, приходим к схеме, показанной на рис. 6.26.

Устройство для наблюдения линейной функции переменных состояния. При модальном управлении главная задача — реализация закона регулирования $u=-\mathbf{p}\mathbf{x}$, вид и параметры которого в предположении полной информации могут быть установлены изложенным в § 6.4 методом. Поэтому интерес представляет не столько оценка с помощью наблюдающего устройства отдельных переменных состояния объекта,

сколько сразу оценка линейного функционала этих переменных, выражающего весь закон регулирования или его часть. В связи с этим возникает вопрос о возможности такого наблюдающего устройства и его сложности, по сравнению с рассмотренными ранее наблюдающими устройствами.

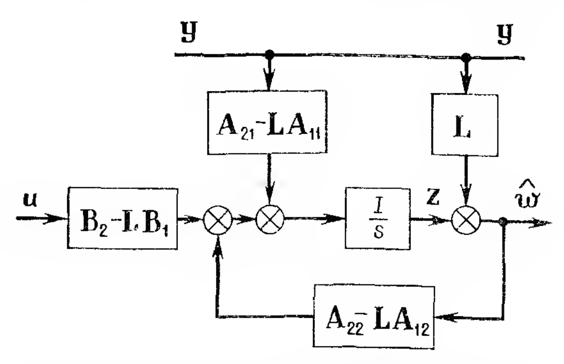


Рис. 6.25. Редуцированное наблюдающее устройство идентификации, не требующее дифференцирования сигналов

Можно доказать, что любой линейный функционал переменных состояния объекта $\varepsilon = \mathbf{a}'\mathbf{x}$ может быть оценен наблюдающим устройством (ν — 1)-го порядка, причем всем корням этого устройства можно придать любые желаемые значения. Параметр ν, называемый *индексом наблюдаемости*, равен наименьшему целому числу, при котором матрица

$$[\mathbf{C}' \vdots \mathbf{A}'\mathbf{C}' \vdots (\mathbf{A}')^2\mathbf{C}' \vdots \ldots \vdots (\mathbf{A}')^{\nu-1}\mathbf{C}'] \qquad (6.77)$$

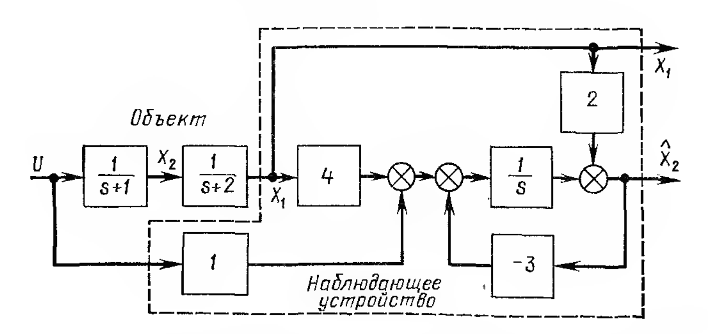


Рис. 6.26. Редуцированное наблюдающее устройство идентификации, присоединенное к наблюдаемому объекту

имеет ранг n. Поскольку для любого полностью наблюдаемого объекта выполняется условие $\nu - 1 \leqslant n - r$, причем для большинства объектов $\nu - 1$ много меньше $n - r$, наблюдение линейного функционала переменных состояния часто оказывается значительно более простой задачей, чем наблюдение полного вектора состояния $\mathbf{x}$ или его части.

Общая структура наблюдающего устройства функционала аналогична структуре рассмотренного выше редуцированного устройства для наблюдения полного вектора состояния в том смысле, что оценка $\hat{\varepsilon}$ функционала $\varepsilon = \mathbf{a}'\mathbf{x}$ определяется уравнением:

$$\hat{\varepsilon}(t) = \mathbf{l}'\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{e}'\,\mathbf{z}(t), \qquad (6.78)$$

где $\mathbf{z}(t)$ — вектор состояния наблюдающего устройства

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}\mathbf{b}u. \qquad (6.79)$$

Матрицы $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{T}$ и матрица $\mathbf{B}$, представляющая собой в данном случае матрицу-столбец $\mathbf{b}$, рассмотрены выше. Что касается матриц-столбцов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{e}$, то для получения требуемого функционала $\hat{\varepsilon} = \mathbf{a}'\mathbf{x}$ они должны удовлетворять уравнению

$$\mathbf{l}'\,\mathbf{C} + \mathbf{e}'\,\mathbf{T} = \mathbf{a}'. \qquad (6.80)$$

Проиллюстрируем общий метод синтеза устройства для наблюдения линейного функционала на конкретном примере.

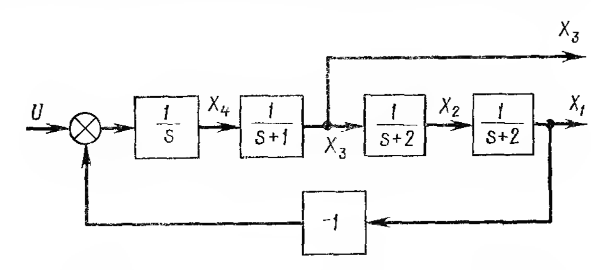


Рис. 6.27. Замкнутая система четвертого порядка

Пример. Рассмотрим объект в виде замкнутой системы четвертого порядка, показанный на рис. 6.27. Координаты x_1 и x_3 этого объекта доступны измерению. Найдем индекс наблюдаемости ν объекта.

Основываясь на структурной схеме, составляем дифференциальные уравнения отдельных звеньев. Матричная форма записи этих уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u; \qquad (6.81\text{а})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \qquad (6.81\text{б})$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.82)$$

Выходной вектор $\mathbf{y}$ образуется измеряемыми переменными состояния x_1 и x_3, что и учтено структурой матрицы $\mathbf{C}$.

Первый элемент блочной матрицы (6.77)

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

представляет собой матрицу, ранг которой равен единице, т. е. меньше $n = 4$. Учитывая в матрице (6.77) два первых элемента, имеем

$$[\mathbf{C}' \vdots \mathbf{A}'\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.83)$$

Как показывает непосредственное вычисление, определитель этой матрицы (он имеет четвертый порядок) отличен от нуля. Таким образом, ранг матрицы (6.83), получающийся из (6.77) при $\nu - 1 = 1$, равен порядку объекта и, следовательно, индекс наблюдаемости $\nu = 2$. Порядок наблюдающего устройства на единицу меньше индекса наблюдаемости объекта ν и в данном случае равен единице. Следовательно, можно осуществить наблюдение любого линейного функционала переменных состояния объекта при использовании устройства первого порядка.

Предположим, что необходимо синтезировать устройство для наблюдения функционала $\varepsilon = x_2 + x_4$, причем собственное значение (корень) этого устройства должно быть -3. Запишем уравнение (6.79) наблюдающего устройства в предположении, что входной сигнал u отсутствует:

$$\dot{z}(t) = -3z(t) + \mathbf{H}\mathbf{x}(t).$$

При использовании только измеряемых составляющих это уравнение

$$\dot{z}(t) = -3z(t) + \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \qquad (6.84)$$

где $\mathbf{G} = [g_1 \ 0 \ g_3 \ 0]$.

Найдем матрицу преобразования $\mathbf{T}$ вектора $\mathbf{x}(t)$ в скаляр $z(t)$, содержащий искомый функционал $x_2 + x_4$.

Этому условию удовлетворяет матрица вида $\mathbf{T} = [t_1 1 t_3 1]$, так как $z(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) = t_1x_1 + x_2 + t_3x_3 + x_4$.

Чтобы определить элементы t_1, t_3, g_1, g_3, воспользуемся уравнением (6.60). Заменяя в нем $\mathbf{H}$ на $\mathbf{G}$, имеем

$$[t_1 \ 1 \ t_3 \ 1] \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3[t_1 \ 1 \ t_3 \ 1] = [g_1 \ 0 \ g_3 \ 0].$$

Переходя к поэлементным уравнениям и решая их, получим $t_1 = -1$, $t_3 = -3$, $g_1 = -2$, $g_3 = -5$. Таким образом, уравнение (6.84), описывающее наблюдающее устройство, при учете внешнего воздействия u принимает вид

$$\dot{z}(t) = -3z(t) - 2x_1 - 5x_3 + u. \qquad (6.85)$$

Структурная схема этого устройства, составленная по уравнению (6.85), приведена на рис. 6.28.

Как показывает уравнение

$$z(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) = [-1 \ 1 \ -3 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4,$$

выходной сигнал $z(t)$ наблюдающего устройства помимо искомого функционала $x_2 + x_4$ содержит составляющие $-x_1$ и $-3x_3$, зависящие от измеряемых переменных состояния x_1, x_3. Поэтому для измерения функционала $x_2 + x_4$ необходимо указанные составляющие добавить с противоположным знаком к сигналу $z(t)$, что и осуществлено на структурной схеме. Следовательно, наблюдающее устройство функционала $x_2 + x_4$ представляется всей схемой, изображенной на рис. 6.28.

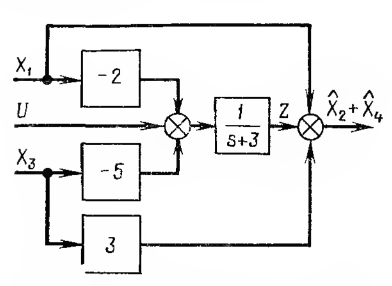


Рис. 6.28. Устройство для наблюдения линейного функционала

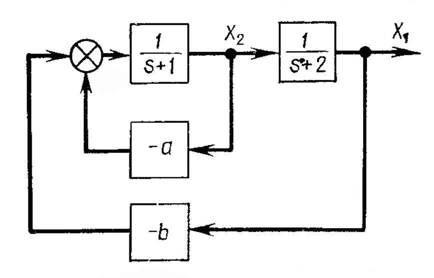


Рис. 6.29. Замкнутая система со свободно управляемыми корнями в случае возможности непосредственного измерения переменных состояний x_1, x_2

Корни замкнутой системы с наблюдающим устройством. Точно так же, как это было сделано в случае замкнутой системы с фильтром Калмана, для замкнутой системы, содержащей любое из наблюдающих устройств Льюинбергера, можно доказать следующее положение.

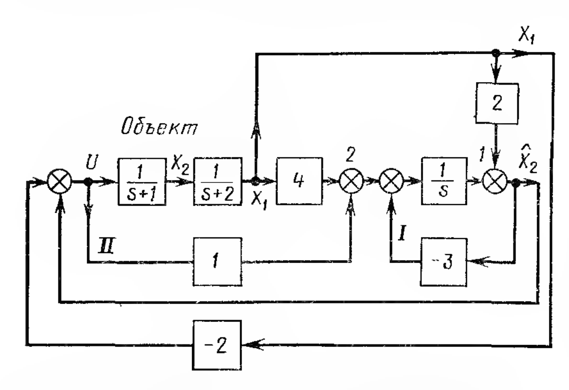


Рис. 6.30. Замкнутая система с реализацией закона регулирования наблюдающим устройством

Если линейный закон регулирования реализуется при использовании наблюдающего устройства, то корни образующейся замкнутой системы равны корням наблюдающего устройства и корням замкнутой системы для случая, когда закон регулирования сформирован непосредственно по переменным состояния без учета возможности их измерения. Таким образом, наблюдающее устройство не изменяет корней замкнутой системы, полученной в предположении полной информации о переменных состояния, а лишь добавляет свои корни.

Пример. Для объекта второго порядка, показанного на рис. 6.23, произведем синтез управляющего устройства, при котором корни замкнутой системы принимают значения $-1 \pm j$.

В предположении наличия информации о переменных состояния x_1 и x_2 получаем замкнутую систему, изображенную на рис. 6.29. Коэффициенты об-

ратных связей a и b можно найти по способу, изложенному в § 6.4. Однако в данном случае, когда в объекте нет перекрещивающихся связей, эти коэффициенты проще определить, написав характеристический полином замкнутой системы и приравняв его полиному, имеющему корни $-1 \pm j$. В результате получим $a = -1$, $b = 2$. Следовательно, закон регулирования $u = -2x_1 + x_2$.

Из двух переменных состояния объекта непосредственному измерению доступна (что отмечалось ранее) лишь переменная x_1. Для оценки переменной x_2 используем наблюдающее устройство, синтез которого произведен в примере. Добавляя в схеме, показанной на рис. 6.26, связи, реализующие закон регулирования $u = -2x_1 + \hat{x}_2$, получим схему, изображенную на рис. 6.30. С помощью эквивалентных преобразований эту структурную схему и соответствующую физическую систему можно значительно упростить. В процессе преобразования точку суммирования *1* переносим с выхода на вход звена $1/s$, а затем на вход замкнутого контура *I*. После замены этого контура эквивалентным звеном $1/(s + 3)$ точку суммирования *2* путем перемещения в направлении распространения сигнала переносим на вход замкнутого контура *II*. В результате перед этим контуром образуется замкнутый контур с положительной обратной связью $1/(s + 3)$ и прямой цепью с передаточной функцией *1*. Объединяем теперь связи, охватывающие объект, в одно звено. Преобразованная структурная схема замкнутой системы показана на рис. 6.31.

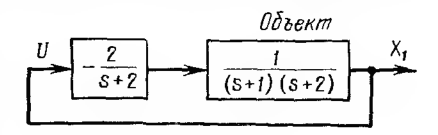


Рис. 6.31. Замкнутая система, эквивалентная системе, показанной на рис. 6.30.

При синтезе собственное значение наблюдающего устройства было принято равным -3. Рассчитывая корни получившейся замкнутой системы, можно убедиться, что они имеют значения -3, $-1 \pm j$, т. е., как это и должно быть, совпадают с принятыми при синтезе корнями наблюдающего устройства и замкнутой системы, соответствующей случаю непосредственного использования обратной связи по полному вектору состояния.

§ 6.7. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ

Эта задача решается с помощью уравнения (6.44) и иллюстрируется ниже на конкретном примере.

Пример 1. Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad (6.86)$$

который характеризуется передаточной функцией

$$\mathrm{G}(s) = \frac{\mathrm{X}(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 7s + 2} \begin{bmatrix} s+4 \\ s^2 + 5s \\ s+2 \end{bmatrix}.$$

Полагаем сначала, что имеется полная информация о переменных состояния. Это равнозначно возможности формирования полного закона регулирования $u = -[p_1 p_2 p_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (полной обратной связи по состоянию) и обеспечению для замкнутой системы любого желаемого характеристического полинома $H(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$. Уравнение (6.44) сводится в этом случае к виду $p_1(s + 4) + p_2(s^2 + 5s) + p_3(s + 2) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 - (s^3 + 6s^2 + 7s + 2)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получим систему уравнений

$$p_2 = a_1 - 6$$
$$p_1 + 5p_2 + p_3 = a_2 - 7$$
$$4p_1 + 2p_3 = a_3 - 2$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - 6 \\ a_2 - 7 \\ a_3 - 2 \end{bmatrix}. \quad (6.87)$$

Если объект полностью управляем, матрица в левой части уравнения (6.87) неособая, так что

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 - 6 \\ a_2 - 7 \\ a_3 - 2 \end{bmatrix} \\ &\text{или} \\ \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10a_1 - 2a_2 + a_3 - 48 \\ 2a_1 - 12 \\ -20a_1 + 4a_2 - a_3 + 94 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

Если теперь учесть, что обратная связь по состоянию неполная, например, положить $p_1 = 0$, то из первой строки матричного уравнения (6.88) получим

$$10a_1 - 2a_2 + a_3 = 48. \quad (6.89)$$

Это условие ограничивает выбор желаемых корней замкнутой системы, т. е. если корни выбраны так, что условие (6.89) не выполняется, реализовать эти корни неполной обратной связью по состоянию не представляется возможным.

Выражая по теореме Виета коэффициенты a_i через корни замкнутой системы, можно на основании уравнения (6.89) построить запретные области, т. е. области, в которые нельзя поместить желаемые корни применением неполной обратной связи по состоянию. Если желаемые корни выбраны в допустимой области, т. е. такими, что выполняется условие (6.89), то эти корни можно реализовать неполной обратной связью по состоянию. При этом коэффициенты усиления p_2, p_3 обратных связей определяются из соответствующих поэлементных уравнений, вытекающих из матричного уравнения (6.88).

Выходной вектор $\mathbf{y}(t)$ представляет собой информацию, снимаемую с объекта. Его составляющими могут быть не только измеряемые переменные состояния x_i (как в только что рассмотренном примере), но и измеряемые линейные комбинации переменных состояния. Если в уравнении $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ матрица $\mathbf{C}$ имеет размеры $n \times n$ и ее ранг равен порядку n объекта, то этот объект относится к объектам с полной информацией о переменных состояния, так как вектор состояния $\mathbf{x}$ однозначно определяется измеряемым вектором $\mathbf{y}$ согласно уравнению $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}$. С помощью обратной связи $u = -\mathbf{k}\mathbf{y}$, где $\mathbf{k}$ — матрица-строка из n элементов, корням замкнутой системы можно придать любые желаемые значения (задача решается так же, как изложено § 6.4, при условии $\mathbf{p} = \mathbf{k}\mathbf{C}$).

Если матрица $\mathbf{C}$ имеет размеры $r \times n$, $r < n$ и ее ранг равен r, то объект относится к классу объектов с неполной информацией о переменных состояния, так как определить из уравнения $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ по изме-

ряемому вектору $\mathbf{y}$ все переменные состояния x_i не представляется возможным. С помощью обратной связи $u = -\mathbf{ky}$, где $\mathbf{k}$ — матрица-строка из r элементов, в данном случае возможно управлять положением корней лишь в некоторых пределах. Задача управления корнями решается аналогично изложенному в примере 1. Проиллюстрируем это самостоятельным примером.

Пример 2. Рассмотрим полностью управляемый объект, описываемый уравнениями:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u; \qquad (6.90)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \qquad (6.91)$$

Согласно формуле (6.67), этот объект полностью наблюдаем, но обратная связь $u = -\mathbf{ky}$, которой можно охватить этот объект, не дает полной информации о переменных состояния (для извлечения полной информации требуется специальное наблюдающее устройство) Поэтому на свободное управление корнями замкнутой системы рассчитывать нельзя.

Передаточная функция объекта

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{w}(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^3 + 10s^2 + s + 10} \begin{bmatrix} 10 \\ 10s \end{bmatrix}. \qquad (6.92)$$

Необходимо найти ограничение на положение корней λ_1, λ_2, λ_3 замкнутой системы, при соблюдении которого они могут быть реализованы обратной связью по выходному сигналу $\mathbf{y}$.

Характеристический полином синтезируемой замкнутой системы

$$H(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3,$$

так что при учете (6.92) уравнение (6.44) перепишем в форме

$$[k_1 \; k_2] \begin{bmatrix} 10 \\ 10s \end{bmatrix} = (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3) - (s^3 + 10s^2 + s + 10).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получим

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}. \qquad (6.93)$$

Нетрудно видеть, что число скалярных уравнений превышает число неизвестных k_i. Поэтому коэффициенты k_i в общем случае могут быть определены при наложении некоторых ограничений на коэффициенты a_i, т.е. на желаемые корни λ_i. Решая относительно k_1, k_2 скалярные уравнения, получающиеся из двух первых строк матричного уравнения (6.93), и подставляя результат в третье уравнение, получим условие совместимости, которое для данного случая сводится к условию $a_1 = 10$. Если корни λ_i выбраны такими, что это условие выполнено, то искомая матрица цепи обратной связи

$$\mathbf{k} = \frac{1}{10} [a_3 - 10 \quad a_2 - 1].$$

Чтобы получить бо́льшую свободу управления корнями, в прикладных задачах увеличивают число различных чувствительных элементов, устанавливаемых на объекте, т. е. формируют выходной вектор **y**, дающий наиболее полную информацию о переменных состояния x_i. Если возможность непосредственного измерения с помощью чувствительных элементов отсутствует, то информацию о переменных состояния можно восстановить с помощью рассмотренных выше наблюдающих устройств.

Существует и другой путь восстановления информации о переменных состояния. Этот путь связан с введением в цепь обратной связи $u = -\mathbf{k}\mathbf{y}$ фильтров (изложенные выше методы синтеза используют только обратные связи в виде усилительных звеньев). В следующем параграфе на примере конкретной системы достаточно высокого порядка показывается, что такой подход весьма эффективен.

§ 6.8. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ УЧЕТЕ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ФОРМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Достоинство методов модального управления в том, что они позволяют синтезировать системы управления весьма сложных объектов. В качестве примера произведем синтез системы стабилизации большой баллистической ракеты при учете связи изгибных колебаний продольной оси с аэродинамическими силами и моментами, действующими на ракету.

Уравнения колебаний ракеты по углу тангажа, учитывающие два первых тона упругих колебаний продольной оси, имеют следующий вид [см. (5.103), (5.133), (5.137)]:

$$\left.\begin{aligned} m_0 V(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha}) &= Y; \\ J\ddot{\vartheta} &= M_{z1}; \\ M_1[\ddot{\xi}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1] &= \Xi_1; \\ M_2[\ddot{\xi}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2] &= \Xi_2. \end{aligned}\right\} \quad (6.94)$$

При изгибных колебаниях поперечная сила Y и продольный момент M_{z1} изменяются не только за счет изменения положения вектора тяги T, но и за счет изменения местных углов атаки. Имея в виду учесть изменение местных углов атаки (оно может быть причиной явления флаттера), будем принимать поперечную аэродинамическую силу, продольный аэродинамический момент и обобщенные силы при изгибных колебаниях в форме (5.141), где местные углы атаки α^* определяются формулой (5.140). Добавляя силу и момент, обусловливаемые вектором тяги T, — см. (5.109), (5.117), (5.138) — получим следующие общие выражения боковой силы, продольного момента и обобщенных сил первых двух форм изгибных колебаний:

$$
\left.
\begin{aligned}
&Y = T[\delta + \sigma_1(l_B)\xi_1(t) + \sigma_2(l_B)\xi_2(t)] + q_D S\int_0^L C_y^\alpha(l)\alpha^*(l)\,dl;\\
&M_{z1} = -T[(l_C - l_B)\sigma_1(l_B) + \varphi_1(l_B)]\xi_1(t) -\\
&\quad -T[(l_C - l_B)\sigma_2(l_B) + \varphi_2(l_B)]\xi_2(t) - T[(l_C - l_B)\delta -\\
&\quad -q_D S\int_0^L C_y^\alpha(l)(l_C - l)\alpha^*(l)\,dl;\\
&\Xi_1 = T[\varphi_1(l_B)\delta + \sigma_1(l_B)\varphi_1(l_B)\xi_1(t) + \sigma_2(l_B)\varphi_1(l_B)\xi_2(t)] +\\
&\quad + q_D S\int_0^L C_y^\alpha(l)\varphi_1(l)\alpha^*(l)\,dl;\\
&\Xi_2 = T[\varphi_2(l_B)\delta + \sigma_1(l_B)\varphi_2(l_B)\xi_1(t) + \sigma_2(l_B)\varphi_2(l_B)\xi_2(t)] +\\
&\quad + q_D S\int_0^L C_y^\alpha(l)\varphi_2(l)\alpha^*(l)\,dl;\\
&\alpha^*(l) = \alpha + \frac{l_C - l}{V}\dot{\vartheta} - \frac{\dot{q}(l,t)}{V} + \frac{\partial q(l,t)}{\partial l};\\
&q(l,t) \approx \varphi_1(l)\xi_1(t) + \varphi_2(l)\xi_2(t);\\
&\partial q(l,t)/\partial l \approx \sigma_1(l)\xi_1(t) + \sigma_2(l)\xi_2(t).
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6.95)
$$

Примем числовые значения параметров [29], соответствующие баллистической ракете со следующими основными данными: стартовый вес $G = 35{,}5 \cdot 10^6$ Н, тяга $T = 54{,}5 \cdot 10^6$ Н, максимальный скоростной напор $q = 62700$ Н/м². Формы двух первых тонов изгибных колебаний показаны на рис. 6.32.

После преобразования по Лапласу, подстановки выражений (6.95) и числовых значений параметров можно уравнения объекта (6.94) записать в следующей матричной форме:

$$
\left[
\begin{array}{cc|cc}
(1860s + 51{,}6) & -1859s & (-0{,}065s - 4{,}68) & (0{,}019s - 7{,}66)\\
0{,}114 & (s^2 + 0{,}076s) & (0{,}00133s - 0{,}087) & (-0{,}00082s - 0{,}0097)\\
\hline
-29{,}3 & 3{,}27s & (s^2 + 0{,}129s + 0{,}312) & (-0{,}048s + 5{,}11)\\
8{,}55 & -1{,}96s & (-0{,}052s + 2{,}01) & (s^2 + 0{,}087s + 8{,}18)
\end{array}
\right] \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} \hat{\alpha}(s)\\ \hat{\vartheta}(s)\\ \hat{\xi}_1(s)\\ \hat{\xi}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -81\\ -1{,}04\\ 19{,}7\\ 19{,}3 \end{bmatrix} \hat{\delta}(s). \qquad (6.96)
$$

Анализ устойчивости объекта. Раскрывая определитель второго порядка, стоящий в верхнем левом углу матрицы системы (6.96), получим характеристический полином жесткой ракеты

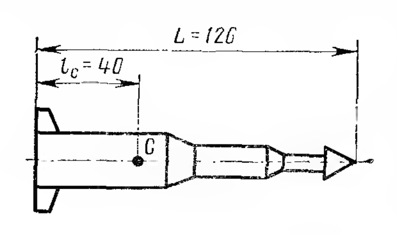
$$
s(s^2 + 0{,}103s + 0{,}116) = s(s^2 + 2\zeta_0\omega_{n0}s + \omega_{n0}^2). \qquad (6.97)
$$

Отсюда находим следующие значения недемпфированной частоты и относительного коэффициента демпфирования жесткой ракеты:

$$\omega_{n0}=0{,}342\ 1/\text{с},\quad \zeta_0=0{,}151.$$

Недемпфированная частота ω_{n0} имеет тот же порядок, что и частота ω_1 первого тона упругих колебаний (см. рис. 6.32).

Близость частот ω_{n0} и ω_1 позволяет предположить существенное взаимовлияние колебаний жесткой ракеты и упругих колебаний по первому тону. Действительно, раскрывая определитель третьего порядка, образующийся добавлением к упомянутому определителю второго порядка еще одной строки и столбца, получим характеристический полином ракеты, учитывающий первый тон упругих колебаний:



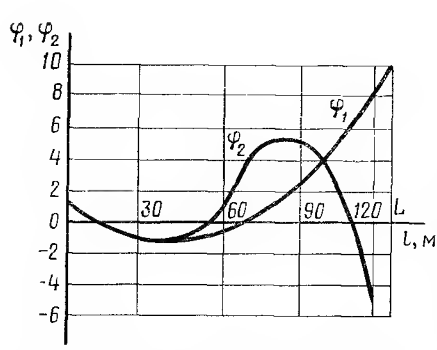


Рис. 6.32. Нормированные формы первого и второго тонов упругих колебаний продольной оси

$$s(s-1{,}08)(s+1{,}28)(s^2+0{,}039s+1{,}81)=s(s-1/T_1)(s+1/T_2)\times(s^2+2\zeta_1^*\omega_{n1}^*s+\omega_{n1}^{*2}).\quad(6.98)$$

Характеристический полином (6.98) показывает, что упругие колебания, представляемые квадратичным трехчленом, изменили свои параметры (недемпфированная частота и относительный коэффициент демпфирования от значений $\omega_1=1\ 1/\text{с}$, $\zeta_1=0{,}01$, соответствующих первому тону упругих колебаний при неподвижной ракете, изменились в полетных условиях к значениям $\omega_1{}^*=1{,}35\ 1/\text{с}$ и $\zeta_1{}^*=0{,}014$). Однако наиболее существенное изменение претерпела форма колебаний, соответствующая жесткому объекту: из затухающей колебательной она перешла в расходящуюся апериодическую, т. е. состоит теперь из двух экспонент, одна из которых беспредельно возрастает.

Учитывая второй тон изгибных колебаний, т. е. раскрывая определитель, соответствующий полной матрице системы (6.96), получим

$$s(s-1{,}31)(s+1{,}54)(s^2+0{,}024s+1{,}32)(s^2+0{,}062s+9{,}3)=$$
$$=s\left(s-\frac{1}{T_1^*}\right)\left(s+\frac{1}{T_2^*}\right)(s^2+2\zeta_1^{**}\omega_{n1}^{**}s+\omega_{n1}^{**2})(s^2+2\zeta_2^*\omega_{n2}^*s+\omega_n^{*2}).\quad(6.99)$$

Нетрудно видеть, что учет второго тона не изменяет характера взаимовлияния форм колебаний. Форма движения «жесткий объект»

по-прежнему неустойчива, а параметры упругих колебаний по первому и второму тону имеют значения:

$$\omega_{n1}^{**} = 1{,}15 \ 1/\text{с}, \quad \zeta_1^{**} = 0{,}01;$$
$$\omega_{n2}^{*} = 3{,}05 \ 1/\text{с}, \quad \zeta_1^{*} = 0{,}01.$$

Типовая система стабилизации. Присоединим к упругой ракете типовую систему стабилизации, состоящую из свободного гироскопа, ДУСа и привода управляющего органа (привода камеры ракетного двигателя). В результате образуется замкнутая система, структурная схема которой показана на рис. 6.33.

Выходным сигналом ракеты считается показание свободного гироскопа, установленного в точке с координатой $l_\text{Г}$. В этой же точке устанавливается и датчик угловой скорости $K_\text{ДУС}$.

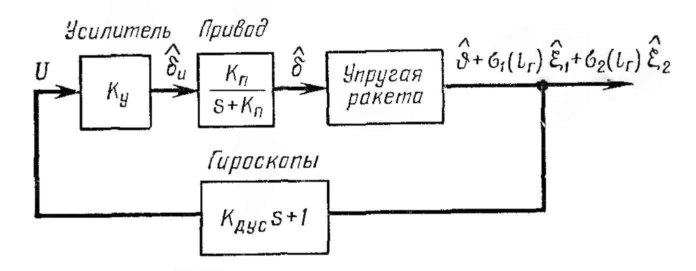


Рис. 6.33. Типовая система стабилизации при учете двух первых тонов изгибных колебаний

Согласно структурной схеме закон регулирования

$$\hat{\delta}(s) = \frac{K_\text{у} K_\text{п}(K_\text{ДУС}s+1)}{s+K_\text{п}}\hat{\vartheta}(s) + \sigma_1(l_\text{Г})\frac{K_\text{у} K_\text{п}(K_\text{ДУС}s+1)}{s+K_\text{п}}\hat{\xi}_1(s) + $$
$$+ \sigma_2(l_\text{Г})\frac{K_\text{у} K_\text{п}(K_\text{ДУС}s+1)}{s+K_\text{п}}\hat{\xi}_2(s). \qquad (6.100)$$

При модальном управлении неизменяемые звенья (усилитель, привод) относятся к объекту. Поэтому за входной сигнал объекта принимаем сигнал u на входе усилителя, связанный с углом δ передаточной функцией,

$$U(s) = (s+K_\text{п})\hat{\delta}/(K_\text{у} K_\text{п}).$$

Учитывая, что этот сигнал является координатой замкнутой системы, переписываем закон регулирования (6.100), перенося все члены, зависящие от координат, в левую часть:

$$(K_\text{ДУС}s+1)\hat{\vartheta}(s) + \sigma_1(l_\text{Г})(K_\text{ДУС}s+1)\hat{\xi}_1(s) +$$
$$+ \sigma_2(l_\text{Г})(K_\text{ДУС}s+1)\hat{\xi}_2(s) - (s+K_\text{п})\hat{\delta}(s)/K_\text{у}K_\text{п} = 0. \qquad (6.101)$$

Добавляя уравнение (6.101) к уравнениям ракеты (6.96), получим замкнутую систему уравнений, которая описывает систему, показанную на рис. 6.33.

Предположим, что необходимо создать замкнутую систему, в которой составляющая свободного движения, соответствующая «жесткой ракете», колебательная и имеет параметры $\omega_{n0} = 2$ 1/с; $\zeta_0 = 0{,}5$. Сначала решим эту задачу без учета изгибных колебаний. В этом случае определитель замкнутой системы, составленный по уравнениям (6.96) и (6.101), имеет вид

$$\begin{vmatrix} (1860s+51{,}6) & -1859s & 81 \\ 0{,}114 & (s^2+0{,}076s) & 1{,}04 \\ 0 & (K_{\text{ДУС}}s+1) & -(s+K_{\text{п}})/K_{\text{у}}K_{\text{п}} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.102)$$

Принимаем характеристический полином желаемой замкнутой системы в форме

$$(s+a)(s+b)(s^2+2\zeta_0\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2). \quad (6.103)$$

Раскрывая определитель (6.102) и приравнивая коэффициенты получившегося полинома коэффициентам полинома (6.103), предварительно приняв в нем $\omega_{n0} = 2$ 1/с; $\zeta_0 = 0{,}5$, образуем систему из четырех алгебраических уравнений, в которых содержится пять неизвестных: a, b, $K_{\text{ДУС}}$, $K_{\text{у}}$, $K_{\text{п}}$. Примем для постоянной времени привода типовое значение 0,1, т. е. положим $K_{\text{п}} = 10$. Тогда, разрешая систему алгебраических уравнений относительно остальных неизвестных, находим: $K_{\text{у}} = 0{,}0016$, $K_{\text{ДУС}} = 0{,}618$; $a = 8{,}08$; $b = 0{,}027$.

Таким образом, найденные значения параметров $K_{\text{п}}$, $K_{\text{у}}$, $K_{\text{ДУС}}$ при обеспечении устойчивости замкнутой системы (действительные корни $s_1 = -a$, $s_2 = -b$ получились отрицательными) придают комплексным корням $s_3, s_4 = -\zeta_0\omega_{n0} \pm j\omega_{n0}\sqrt{1-\zeta_0^2}$ желаемые значения.

Учтем теперь первый тон изгибных колебаний. При расположении гироскопов на расстоянии $l_{\text{Г}} = 108$ м от кормового среза ракеты и только что найденных значениях параметров $K_{\text{п}}$, $K_{\text{у}}$, $K_{\text{ДУС}}$ определитель четвертого порядка, соответствующий субматрице в верхнем левом углу общей матрицы системы (6.96), (6.101), по разворачивании, имеет вид: $(s-1{,}08)(s+1{,}28)(s^2+0{,}041s+1{,}82)(s+10)s = 0$.

Сопоставляя этот полином с характеристическим полиномом (6.98) самой ракеты, получающимся при учете первого тона упругих колебаний, видим, что в замкнутой системе первый тон оказывает такое же влияние на устойчивость, как и в случае отдельно взятой ракеты, т. е. делает систему неустойчивой. Квадратичные трехчлены, соответствующие упругим колебаниям, также примерно одинаковы. Отсюда следует, что в случае существенного взаимного влияния форм колебаний введение типового автопилота практически не сказывается на колебаниях ракеты. Этот вывод не изменяется и при учете второго тона изгибных колебаний.

Когда частоты колебаний жесткой ракеты и первого тона упругих колебаний различаются достаточно сильно, влияние упругих колебаний успешно исключают применением двух гироскопов, расположенных слева и справа от пучности первого тона, или применением «следящего фильтра», выделяющего тона упругих колебаний, кото-

рые используются затем для компенсации этих тонов в сигнале гироскопа. При близости частот колебаний жесткой ракеты и первого тона (как это имеет место в рассматриваемом примере) такие способы стабилизации не приводят к положительным результатам. Следовательно, типовая схема автопилота (с чувствительными элементами в виде свободных гироскопов и ДУСов) недостаточна для стабилизации ракеты с близкими частотами жесткого объекта и первого тона упругих колебаний.

Синтез системы стабилизации методом модального управления. Трудности синтеза системы стабилизации, указанные в предыдущем разделе, могут быть преодолены при использовании методов модального управления. Проиллюстрируем это на том же примере упругой ракеты с математической моделью седьмого порядка.

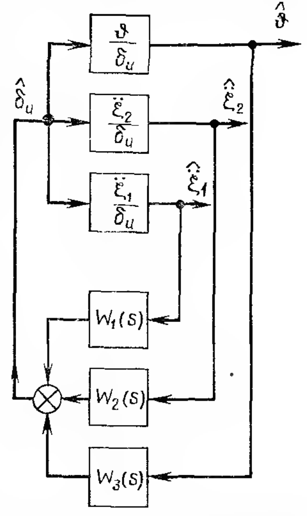


Рис. 6.34. Структурная схема системы стабилизации

В § 6.4 было показано, что возможность свободного управления корнями объекта n-го порядка возникает при наличии информации о n переменных состояния этого объекта. В данном случае речь идет о восьми переменных состояния объекта, образуемого упругой ракетой и сервоприводом.

Примем структурную схему синтезируемой системы стабилизации в виде, показанном на рис. 6.34, где $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_3(s)$ — фильтры в цепях обратной связи. Как и раньше, сервопривод поворотной камеры ракетного двигателя относится к объекту, так что на структурной схеме $\delta_и$ — входной сигнал сервопривода, т. е.

$$\hat{\delta} = 10\hat{\delta}_и/(s+10). \qquad (6.104)$$

Из (6.96) и (6.104) можно получить следующие передаточные функции объекта в отношении угла тангажа и вторых производных от «нормальных координат» первого и второго тонов изгибных колебаний

$$\frac{\hat{\vartheta}(s)}{\hat{\delta}_и(s)} = \frac{-10{,}4\,(s-1{,}15)\,(s+0{,}00011)\,(s+1{,}34)\,(s+0{,}027+j2{,}87)\times(s+0{,}027-j2{,}87)}{F(s)} =$$

$$= \frac{a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{F(s)} = \frac{N_\vartheta(s)}{F(s)}; \qquad (6.105)$$

$$\frac{\hat{\ddot{\xi}}_1(s)}{\hat{\delta}_и(s)} = \frac{197{,}2\,(s-1{,}56)\,(s+1{,}91)\,(s-0{,}0024+j2{,}18)\,(s-0{,}0024-j2{,}18)\,s^3}{F(s)} =$$

$$= \frac{b_7 s^7 + b_6 s^6 + b_5 s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3}{F(s)} = \frac{N_{\xi 1}(s)}{F(s)}; \qquad (6.106)$$

$$\frac{\hat{\ddot{\xi}}_2(s)}{\hat{\delta}_{и}(s)} = \frac{192,5\,(s-1,062)\,(s+1,229)\,(s+0,0156+j0,365)\,(s+0,0156-j0,365)\,s^3}{F(s)} =$$

$$= \frac{c_7 s^7 + c_6 s^6 + c_5 s^5 + c_4 s^4 + c_3 s^3}{F(s)} = \frac{N_{\xi 2}(s)}{F(s)}, \qquad (6.107)$$

где характеристический полином объекта [см. (6.99) и (6.104)]

$$F(s) = s\,(s+10)\,(s-1,31)\,(s+1,54)\,(s+0,012+j1,15)\,(s+0,012-$$
$$-j1,15)\,(s+0,031+j3,051)\,(s+0,031-j3,051) = s^8 + f_7 s^7 +$$
$$+ f_6 s^6 + f_5 s^5 + f_4 s^4 + f_3 s^3 + f_2 s^2 + f_1 s. \qquad (6.108)$$

Введем в рассмотрение вспомогательный, в действительности не существующий объект

$$\frac{x_1(s)}{\hat{\delta}_{и}(s)} = 1/F(s), \qquad (6.109)$$

имеющий те же корни, что и реальный объект. Из передаточной функции (6.109) нетрудно получить дифференциальное уравнение этого объекта

$$x_1^{(VIII)} + f_7 x_1^{(VII)} + f_6 x_1^{(VI)} + f_5 x_1^{(V)} + f_4 x_1^{(IV)} + f_3 \dddot{x}_1 + f_2 \ddot{x}_1 + f_1 \dot{x}_1 = \delta_{и}. \qquad (6.110)$$

Будем рассматривать в качестве переменных состояния вспомогательного объекта $x_1, x_2, \ldots, x_8$, где

$$\dot{x}_1 = x_2;\ \dot{x}_2 = x_3;\ \dot{x}_3 = x_4;\ \dot{x}_4 = x_5;\ \dot{x}_5 = x_6;\ \dot{x}_6 = x_7;\ \dot{x}_7 = x_8. \qquad (6.111)$$

Тогда уравнение (6.110) можно переписать так:

$$\dot{x}_8 = -f_1x_2 - f_2x_3 - f_3x_4 - f_4x_5 - f_5x_6 - f_6x_7 - f_7x_8 + \delta_{и}. \qquad (6.112)$$

Вместе с уравнениями (6.111) оно образует замкнутую систему уравнений, имеющую в матричной форме следующий вид (матричное уравнение вспомогательного объекта):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 & -f_4 & -f_5 & -f_6 & -f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{и}. \qquad (6.113)$$

Сопоставляя выражения $\hat{x}_1 = \hat{\delta}_{и}/F(s)$ и $\hat{\ddot{\xi}}_1(s) = (b_7 s^7 + b_6 s^6 + b_5 s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3)\,\hat{\delta}_{и}(s)/F(s)$, вытекающие соответственно из (6.109) и

(6.106), видим, что сигнал $\ddot{\xi}_1$ реального объекта выражается через переменную состояния x_1 вспомогательного объекта уравнением

$$\ddot{\xi}_1 = b_7 x_1^{(VII)} + b_6 x_1^{(VI)} + b_5 x_1^{(V)} + b_4 x_1^{(IV)} + b_3 \dddot{x}_1.$$

При учете (6.111)

$$\ddot{\xi}_1 = b_7 x_8 + b_6 x_7 + b_5 x_6 + b_4 x_5 + b_3 x_4. \tag{6.114}$$

Аналогичным образом, основываясь на (6.109), (6.111) и соответственно на (6.105) и (6.107), можно выразить через переменные состояния x_i вспомогательного объекта угол тангажа реального объекта и вторую производную нормальной координаты второго тона изгибных колебаний. Имеем:

$$\vartheta = a_5 x_6 + a_4 x_5 + a_3 x_4 + a_2 x_3 + a_1 x_2 + a_0 x_1; \tag{6.115}$$

$$\ddot{\xi}_2 = c_7 x_8 + c_6 x_7 + c_5 x_6 + c_4 x_5 + c_3 x_4. \tag{6.116}$$

Примем $\ddot{\xi}_1$, $\ddot{\xi}_2$ и ϑ за переменные состояния реального объекта. Этот объект имеет восьмой порядок, так что для свободного управления его корнями необходимо располагать еще пятью переменными состояния, в качестве которых будем рассматривать следующие сигналы:

$$\hat{\ddot{\xi}}_1(s); \quad \frac{\hat{\ddot{\xi}}_1(s)}{(s+1{,}91)}; \quad \frac{\hat{\ddot{\xi}}_2(s)}{(s+1{,}229)}; \quad \frac{\hat{\vartheta}(s)}{(s+0{,}00011)}; \quad \frac{\hat{\vartheta}(s)}{(s+1{,}34)}. \tag{6.117}$$

Знаменатели последних четырех выражений выбраны совпадающими с действительными отрицательными полюсами реального объекта, а первый сигнал получается при использовании полюса в начале координат.

Передаточные функции реального объекта, связывающие сигналы (6.117) с входным сигналом $\delta_и$ объекта, получаются из передаточных функций (6.105) ÷ (6.107):

$$\frac{\hat{\ddot{\xi}}_1(s)}{\hat{\delta}_и} = \frac{N_{\xi 1}(s)}{sF(s)} = \frac{d_6 s^6 + d_5 s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2}{F(s)};$$

$$\frac{\hat{\ddot{\xi}}(s)/(s+1{,}91)}{\hat{\delta}_и} = \frac{N_{\xi 1}(s)}{(s+1{,}91)\,F(s)} = \frac{e_6 s^6 + e_5 s^5 + e_4 s^4 + e_3 s^3}{F(s)};$$

$$\frac{\hat{\ddot{\xi}}_2(s)/(s+1{,}229)}{\hat{\delta}_и} = \frac{N_{\xi 2}(s)}{(s+1{,}229)\,F(s)} = \frac{g_6 s^6 + g_5 s^5 + g_4 s^4 + g_3 s^3}{F(s)};$$

$$\frac{\hat{\vartheta}(s)/(s+0{,}00011)}{\hat{\delta}_и} = \frac{N_{\vartheta}(s)}{(s+0{,}00011)\,F(s)} = \frac{h_4 s^4 + h_3 s^3 + h_2 s^2 + h_1 s + h_0}{F(s)};$$

$$\frac{\hat{\vartheta}(s)/(s+1{,}34)}{\hat{\delta}_и} = \frac{N_{\vartheta}(s)}{(s+1{,}34)\,F(s)} = \frac{m_4 s^4 + m_3 s^3 + m_2 s^2 + m_1 s + m_0}{F(s)}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в отношении $\ddot{\xi}_1$, $\ddot{\xi}_2$, ϑ. можно и эти переменные состояния реального объекта выразить через переменные состояния x_i вспомогательного объекта. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\dot{\xi}}_1 = d_6 x_7 + d_5 x_6 + d_4 x_5 + d_3 x_4 + d_2 x_3; \\ &\hat{\dddot{\xi}}_1/(s+1{,}91) = e_6 x_7 + e_5 x_6 + e_4 x_5 + e_3 x_4; \\ &\hat{\dddot{\xi}}_2/(s+1{,}229) = g_6 x_7 + g_5 x_6 + g_4 x_5 + g_3 x_4; \end{aligned}\right\} \qquad (6.118)$$

$$\hat{\vartheta}/(s+0{,}00011) = h_4 x_5 + h_3 x_4 + h_2 x_3 + h_1 x_2 + h_0 x_1;$$

$$\hat{\vartheta}/(s+1{,}34) = m_4 x_5 + m_3 x_4 + m_2 x_3 + m_1 x_2 + m_0 x_1.$$

В матричной форме система уравнений (6.114), (6.116) и (6.118) записывается как

$$\begin{bmatrix} \hat{\ddot{\xi}}_1(s) \\ \hat{\dddot{\xi}}_1(s)/(s+1{,}91) \\ \hat{\dot{\xi}}_1(s) \\ \hat{\ddot{\xi}}_2(s) \\ \hat{\dddot{\xi}}_2(s)/(s+1{,}229) \\ \hat{\vartheta}(s) \\ \hat{\vartheta}(s)/(s+0{,}00011) \\ \hat{\vartheta}(s)/(s+1{,}34) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(s) \\ \hat{x}_2(s) \\ \hat{x}_3(s) \\ \hat{x}_4(s) \\ \hat{x}_5(s) \\ \hat{x}_6(s) \\ \hat{x}_7(s) \\ \hat{x}_8(s) \end{bmatrix} \qquad (6.119)$$

или после обозначения матрицы системы (6.119) через **A**, а векторов в левой и в правой частях через **y** и **x** как

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad (6.120)$$

Из этого уравнения вектор состояния вспомогательного объекта

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \qquad (6.121)$$

где **y** — вектор состояния реального объекта.

Если вектор состояния **x** вспомогательного объекта известен полностью, то, охватывая этот объект обратными связями по всем составляющим вектора **x** и используя формулу (6.44), можно сдвинуть корни вспомогательного объекта, а следовательно, и совпадающие с ними корни реального объекта, в любые желаемые положения. Фигурирующий в этой формуле вектор **g** для вспомогательного объекта (6.109) в транспонированной форме записывается как

$$\mathbf{g}' = [1, s, s^2, s^3, s^4, s^5, s^6, s^7],$$

так что сама формула (6.44) принимает вид

$$p_1 + p_2 s + p_3 s^2 + p_4 s^3 + p_5 s^4 + p_6 s^5 + p_7 s^6 + p_8 s^7 = \\ = H(s) - F(s), \qquad (6.122)$$

где p_i элементы матрицы-строки, определяющей закон регулирования $\delta_и = -\mathbf{px}$, $F(s)$, $H(s)$ — характеристические полиномы соответственно вспомогательного объекта и содержащей его желаемой замкнутой системы. Из (6.122) видно, что элементы p_i получаются как разности коэффициентов полиномов $H(s)$ и $F(s)$ при соответствующих степенях s.

Используя в законе регулирования $\delta_и = -\mathbf{px}$ уравнение (6.121), получаем следующее выражение закона регулирования через вектор состояния **y** реального объекта:

$$\hat{\delta}_и(s) = -\mathbf{pA}^{-1}\hat{\mathbf{y}}(s). \qquad (6.123)$$

Рассмотрим пример, когда характеристический полином желаемой замкнутой системы

$$H(s) = (s + 10)(s + 4)(s^2 + 2s + 4)(s^2 + 0{,}6s + 1{,}09) \times \\ \times (s^2 + 1{,}8s + 9{,}81) = s^8 + n_7 s^7 + n_6 s^6 + n_5 s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + \\ + n_2 s^2 + n_1 s + n_0.$$

В этой системе составляющая движения, соответствующая жесткому объекту, имеет параметры $\omega_{n0} = 2$ 1/с и $\zeta_0 = 0{,}5$, а два первых тона упругих колебаний при сохранении значений недемпфированной частоты 1 1/с и 3 1/с, соответствующих нестабилизированному объекту, характеризуются относительными коэффициентами демпфирования $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}3$ (вместо $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}01$ для нестабилизированного объекта). Производя вычисления, предусматриваемые уравнением (6.123), находим следующий закон регулирования:

$$\hat{\delta}_и(s) = \left(-3{,}51 - \frac{12{,}39}{s+1{,}91} + \frac{17{,}55}{s}\right)\hat{\ddot{\xi}}_1(s) + \left(3{,}55 - \frac{5{,}32}{s+1{,}229}\right)\hat{\ddot{\xi}}_2(s) + \\ + \left(429{,}6 - \frac{12{,}99}{s+0{,}00011} - \frac{605{,}31}{s+1{,}34}\right)\hat{\vartheta}(s). \qquad (6.124)$$

Однако непосредственно реализовать этот закон затруднительно ввиду невозможности раздельного измерения сигналов $\ddot{\xi}_1(t)$, $\ddot{\xi}_2(t)$

и $\vartheta(t)$. Выходом из данного положения может явиться использование трех свободных гироскопов и трех угловых акселерометров, устанавливаемых попарно (один гироскоп и один акселерометр) в трех различных точках l_1, l_2, l_3 упругой ракеты. Показания ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 свободных гироскопов выражаются через угол тангажа ϑ жесткого объекта и нормальные координаты тонов изгибных колебаний следующим уравнением:

$$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\\ \vartheta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1(l_1) & \sigma_2(l_1) & 1\\ \sigma_1(l_2) & \sigma_2(l_2) & 1\\ \sigma_1(l_3) & \sigma_2(l_3) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vartheta\end{bmatrix}. \tag{6.125}$$

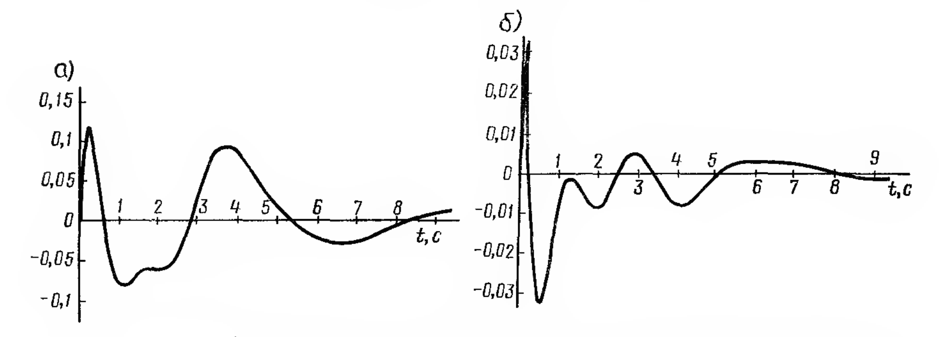


Рис. 6.35. Реакция замкнутой системы по углу тангажа (*а*) и углу отклонения камеры двигателя (*б*) на единичный импульс, прикладываемой в точке $\delta_и$

Из этого уравнения находим

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vartheta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\\ \vartheta_3\end{bmatrix}, \tag{6.126}$$

где матрица из элементов k_{ij} равна матрице, обратной по отношению к фигурирующей в (6.125) матрице наклонов σ_1, σ_2 нормированных форм упругих колебаний по первому и второму тону.

Переходя от матричного уравнения (6.126) к поэлементным уравнениям и производя двукратное дифференцирование первого и второго поэлементного уравнения, получим:

$$\hat{\ddot{\xi}}_1(s)=k_{11}\hat{\ddot{\vartheta}}_1(s)+k_{12}\hat{\ddot{\vartheta}}_2(s)+k_{13}\hat{\ddot{\vartheta}}_3(s);$$

$$\hat{\ddot{\xi}}_2(s)=k_{21}\hat{\ddot{\vartheta}}_1(s)+k_{22}\hat{\ddot{\vartheta}}_2(s)+k_{23}\hat{\ddot{\vartheta}}_3(s);$$

$$\hat{\vartheta}(s)=k_{31}\hat{\vartheta}_1(s)+k_{32}\hat{\vartheta}_2(s)+k_{33}\hat{\vartheta}_3(s).$$

После подстановки этих уравнений в (6.124) получаем окончательный закон регулирования, выраженный через переменные ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, $\ddot{\vartheta}_1$, $\ddot{\vartheta}_2$, $\ddot{\vartheta}_3$, поддающиеся непосредственному измерению (величины

ϑ_i измеряются свободными гироскопами, а $\ddot{\vartheta}_i$ — угловыми акселерометрами). При установке гироскопов и акселерометров в точках с координатами $l_1 = 106{,}5$ м, $l_2 = 79$ м, $l_3 = 51$ м этот закон регулирования принимает вид

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\text{ц}}(s) = [3{,}7 - 140/(s+1{,}91) - 64{,}8/(s+1{,}229) + 198{,}3/s]\,\hat{\ddot{\vartheta}}_1(s) + \\ + [97 + 575/(s+1{,}91) + 99/(s+1{,}229) - 815/s]\,\hat{\ddot{\vartheta}}_2(s) + \\ + [-100{,}5 - 435/(s+1{,}91) - 34{,}1/(s+1{,}229) + 617/s]\,\hat{\ddot{\vartheta}}_3(s) + \\ + [201{,}8 - 6{,}1/(s+0{,}00011) - 284/(s+1{,}34)]\,\hat{\vartheta}_1(s) + \\ + [-400 + 12{,}1/(s+0{,}00011) + 563/(s+1{,}34)]\,\hat{\vartheta}_2(s) + \\ + [628 - 19/(s+0{,}00011) - 885/(s+1{,}34)]\,\hat{\vartheta}_3(s). \qquad (6.127)\end{aligned}$$

Реализация слагаемых, фигурирующих в квадратных скобках, а также всего выражения в этих скобках, не представляет большой трудности.

Закон регулирования (6.127), не вызывая повышения порядка системы, смещает все восемь корней стабилизируемого объекта в заранее выбранные положения. Динамика замкнутой системы, образующейся при добавлении к объекту регулятора (6.127), характеризуется приводимыми на рис. 6.35 переходными процессами.

Глава VII

ДИНАМИКА ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМЫХ РАКЕТ

Ракеты, запускаемые с земли и предназначаемые для поражения воздушных целей, называются зенитными управляемыми ракетами (ЗУР). Автопилоты ЗУР значительно проще, чем самолетные автопилоты или автопилоты баллистических ракет. Это объясняется тем, что контур «ЗУР — автопилот» является лишь звеном замкнутого контура наведения, выполняющего функции управления движением ЦТ ракеты.

По способу формирования команд управления ракеты делятся на телеуправляемые и самонаводящиеся. Для телеуправляемых ракет задача встречи с целью решается при использовании аппаратуры, размещаемой на земле или на движущемся носителе, с которого производится запуск ракеты. Напротив, особенность системы самонаведения состоит в том, что задача встречи решается на борту ракеты без использования какой-либо информации от пункта, с которого производится запуск ракеты.

§ 7.1. ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМЫЕ НЕВРАЩАЮЩИЕСЯ РАКЕТЫ

Телеуправляемые ракеты бывают двух видов: невращающиеся (стабилизированные по крену) и вращающиеся вокруг продольной оси с постоянной скоростью. Однако методы, применяемые для наведения этих ракет на цель, не имеют принципиальных различий.

Методы наведения. Существует несколько методов наведения ракеты на цель, причем почти каждый из этих методов может быть реализован как телеуправляемой, так и самонаводящейся ракетой [17, 20]. Ниже, применительно к телеуправляемым ракетам, кратко описываются метод «трех точек» и метод наведения в упрежденную точку (метод параллельного сближения).

В методе «трех точек» ракета при помощи системы управления удерживается на прямой, соединяющей станцию наведения с целью. Местоположения станции наведения (помещается на земле или на носителе), ракеты и цели представляются тремя точками, в идеальном случае находящимися все время на одной прямой.

Метод наведения в упрежденную точку воспроизводит ситуацию, наблюдающуюся при стрельбе из зенитного орудия по самолету. Как известно, ствол зенитного орудия отводится от линии визирования цели в направлении полета цели на угол упреждения, определяемый скоростью цели до выстрела, высотой и другими параметрами. В результате, по выходе из ствола снаряд летит в упрежденную точку,

в которой при выполнении принятой гипотезы о равномерном и прямолинейном движении цели происходит его встреча с целью. В данном случае при равномерном и прямолинейном движении снаряда реализуется метод параллельного сближения, характеризуемый тем, что линия, соединяющая снаряд с целью, перемещается в пространстве поступательно.

Отличие наведения ЗУР от только что описанного «наведения» артиллерийского снаряда состоит в том, что задача встречи решается не только до старта ракеты, но и после старта в процессе полета ЗУР. В результате этого изменение режима полета цели, происходящее после старта, будет учтено, что является большим преимуществом телеуправляемых ЗУР перед зенитной артиллерией (изменение режима полета цели после выстрела из зенитного орудия нарушает принятую гипотезу о движении цели, что может привести к промаху).

Траектория ракеты при наведении в упрежденную точку имеет меньшую кривизну, чем в случае наведения по методу «трех точек», однако аппаратурная реализация наведения в упрежденную точку сложнее.

Оба метода теленаведения реализуются или посредством ведения ракеты по лучу радиолокационной станции (луч РЛС), или при помощи управляющих команд, передаваемых на борт с пункта наведения. В случае реализации метода трех точек ведением ракеты по лучу используется одна радиолокационная станция. Эта станция осуществляет автосопровождение цели, причем в ее луче автоматически удерживается и наводимая на цель ракета.

Метод наведения в упрежденную точку реализуется двумя радиолокационными станциями. Одна станция осуществляет автосопровождение цели, а другая (ее луч в соответствии с результатами переработки данных от системы автосопровождения цели автоматически направляется в упрежденную точку) используется для ведения ракеты.

Ракета удерживается в луче РЛС за счет установки на ее борту автопилота и приемника, определяющего величину и знак угла ε между линией визирования ракеты со стороны станции наведения и центральной линией луча. Путем умножения ε на дальность R ракеты от станции наведения (дальность R принимается как известная функция времени и вводится временным механизмом) определяется линейное отклонение $h = R\,(t)\,\varepsilon$ ракеты от центральной линии луча. Сигнал h через автопилот подается на рули, отклонение которых возвращает ракету в центр луча. О наведении ракеты командами будет сказано несколько ниже.

О необходимости гироскопа крена. Направление движения телеуправляемой ракеты задается положением луча РЛС, в котором эта ракета находится. Поэтому свободные гироскопы курса и тангажа, с помощью которых направляется, например, движение баллистической ракеты, в автопилоте телеуправляемой ракеты не требуются. Однако в этом автопилоте обязательно должен содержаться свободный гироскоп крена.

Действительно, при возникновении, например, рассогласования h_2 между ракетой и центром луча в вертикальной плоскости необхо-

димо заставить перемещаться ЦТ ракеты также в вертикальной плоскости. Но это возможно только, когда на борту ракеты имеется информация о вертикальной плоскости. Такую информацию дает свободный гироскоп крена (рис. 7.1). Независимо от углового положения ракеты плоскость, определяемая осью ротора и осью вращения наружного кольца гироскопа, всегда вертикальна. Если, используя это обстоятельство, стабилизировать ракету по крену, т. е. путем подачи

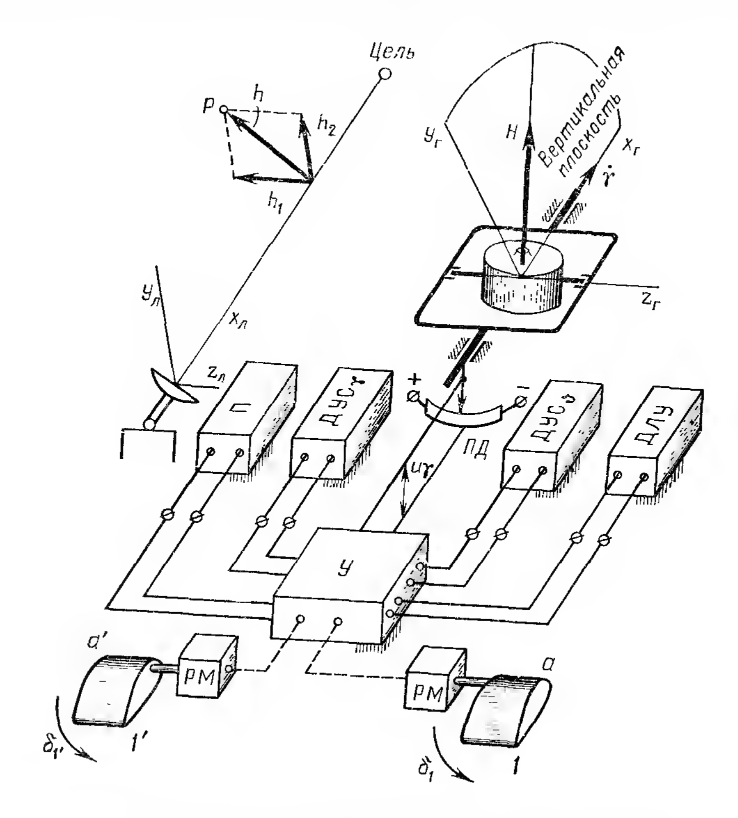


Рис. 7.1. Автопилот стабилизированной по крену телеуправляемой ракеты (каналы крена и тангажа)

сигнала с потенциометрического датчика ПД гироскопа на элероны обеспечить горизонтальность оси вращения $a - a'$ рулей высоты *1*, *1'*, то, подавая от приемника *П* на эти рули рассогласование h_2, можно вызвать движение ракеты в вертикальной плоскости и, следовательно, ликвидацию рассогласования h_2. Для ликвидации линейного рассогласования в боковом направлении используется такое же управление ракетой в наклонной плоскости $x_л z_л$, определяемой следующим образом.

Свяжем с осью луча РЛС систему координат $x_л y_л z_л$, направив ось $x_л$ вдоль луча, ось $y_л$ — кверху в вертикальной плоскости, а ось

$z_л$ — так, чтобы образовалась правая прямоугольная система координат. Плоскость $x_л y_л$ называется вертикальной, а плоскость $x_л z_л$ — наклонной. С гироскопом крена ракеты свяжем систему $x_Г y_Г z_Г$, направив ось $x_Г$ вдоль оси наружного кольца (по продольной оси ракеты), ось $z_Г$ — вправо по оси вращения кожуха гироскопа относительно наружного кольца, а ось $y_Г$ — так, чтобы образовалась правая система координат. Нетрудно видеть, что при параллельности продольной оси x_1 ракеты центральной линии луча $x_л$ система гироскопа $x_Г y_Г z_Г$, а следовательно, и система $x_1 y_1 z_1$ стабилизированной по крену ракеты (идеальная стабилизация), воспроизводят на борту ракеты систему луча $x_л y_л z_л$.

Проекции h_1, h_2 на наклонную $x_л z_л$ и вертикальную $x_л y_л$ плоскости линейного отклонения h ракеты от центральной оси $x_л$ луча измеряются, как указано выше, радиолокационной системой и подаются на соответственные рули стабилизированной по крену ракеты. Роль элеронов могут выполнять рули высоты *1*, *1'*.

Фактически измерение проекций линейного отклонения h производится в системе координат, связанной с антенной РЛС. Антенна устанавливается в двухстепенном кардановом подвесе и при повороте колец подвеса получает некоторый поворот вокруг своей оси симметрии $x_л$, называемый «углом скручивания». Следовательно, антенная система повернута вокруг оси $x_л$ относительно введенной выше системы луча $x_л y_л z_л$ на угол скручивания, так что проекции h_1, h_2 на плоскости системы луча, отождествляемые с проекциями на соответственные плоскости системы антенны, измеряются с некоторыми ошибками.

Ракеты, управляемые не с помощью радиолокационного луча, а передаваемыми на борт ракеты с пункта наведения командами, также должны быть снабжены свободным гироскопом крена. Команды (сигналы) передаются по линии связи, роль которой выполняет или радиолиния, или, как это предусматривалось в немецкой ракете X-4 (1944 — 1945 гг.), проводная связь (при полете ракеты провода сматываются с катушки, укрепленной в хвостовой части ракеты). Если ракета стабилизирована по крену (что возможно лишь при наличии гироскопа крена), то для изменения направления движения ракеты в вертикальной плоскости человек-оператор, находящийся в пункте наведения, посылает на борт команду, отклоняющую рули высоты ракеты. Величину и знак команды управления оператор определяет, наблюдая за рассогласованием между ракетой и целью. Такой способ управления применяется, например, при наведении по методу трех точек, когда рассогласование между ракетой и целью определяется оператором визуально (противотанковые управляемые ракеты).

Контур демпфирования. Телеуправляемая ракета имеет достаточно большое хвостовое оперение и поэтому по углам тангажа и рыскания статически устойчива. Однако демпфирование собственных колебаний ракеты относительно центра масс мало. Для гашения собственных колебаний в закон регулирования при помощи ДУСа вводится член, пропорциональный угловой скорости корпуса ракеты.

В дальнейшем при введении углов Эйлера будем принимать следующий порядок поворотов: рыскание, тангаж, крен. Тогда, с учетом

сказанного выше, закон регулирования, осуществляемый автопилотом, например, по вертикальному каналу, принимает вид

$$\delta = a_1\dot{\vartheta} + b_0h_2, \tag{7.1}$$

где δ — угол отклонения рулей высоты (положительным считается отклонение вниз), $\dot{\vartheta}$ — угловая скорость тангажа, измеряемая при помощи ДУСа, h_2 — отклонение ракеты от центральной линии луча (считается положительным при отклонении ракеты вверх).

Если, как это показано на рис. 7.1, рули высоты выполняют также функции элеронов, то сигнал u_γ, снимаемый с гироскопа крена, отклоняет рули *1*, *1'* в противоположные стороны, благодаря чему осуществляется стабилизация ракеты по крену.

Угол крена γ положителен, если при наблюдении со стороны носка ракета видна повернутой вокруг продольной оси против часовой стрелки. Отклонение правого элерона вниз, а левого вверх (при наблюдении со стороны кормы) считается положительным.

Полагая, что при положительном отклонении ракеты по какому-либо каналу автопилот производит по этому каналу положительное отклонение управляющих органов, получаем следующие уравнения горизонтальных рулей:

$$\delta_1 = a_1\dot{\vartheta} + k_0\gamma + b_0h_2;\ \ \delta_{1'} = a_1\dot{\vartheta} - k_0\gamma + b_0h_2. \tag{7.2}$$

После введения обозначений

$$\delta = a_1\dot{\vartheta} + b_0h_2;\ \ \Delta\delta = k_0\gamma, \tag{7.3}$$

выражения (7.2) переписываются в виде

$$\delta_1 = \delta + \Delta\delta;\ \ \delta_{1'} = \delta - \Delta\delta. \tag{7.4}$$

Пусть $C_2/2$ — эффективность одного руля (руля *1* или руля *1'*) относительно оси тангажа, а $C_2'/2$ — эффективность этого же руля относительно оси крена (продольной оси). Тогда момент, развиваемый обоими рулями вокруг оси тангажа, определяется выражением

$$M_\vartheta = C_2\delta = C_2(a_1\dot{\vartheta} + b_0h_2), \tag{7.5}$$

а вокруг продольной оси — выражением

$$M_\gamma = C_2'\Delta\delta = C_2'k_0\gamma. \tag{7.6}$$

При законе регулирования $\Delta\delta = k_0\gamma$, вытекающем из (7.6), колебания ракеты вокруг продольной оси слабо демпфированы. Для увеличения демпфирования в этот закон дополнительно вводится член, пропорциональный угловой скорости крена $\dot{\gamma}$. Аппаратурно это реализуется установкой на борту ракеты датчика угловой скорости крена ДУС$_\gamma$, сигнал которого после усиления поступает на элероны. Таким образом, окончательный закон регулирования по крену, реализуемый в автопилоте, имеет вид

$$\Delta\delta = k_0\gamma + k_1\dot{\gamma}. \tag{7.7}$$

В случае малых отклонений от равновесного состояния движение ракеты вокруг продольной оси при указанных выше направлениях положительного отсчета описывается уравнением

$$J_x\ddot{\gamma} + D_x\dot{\gamma} = -C_2'\Delta\delta, \tag{7.8}$$

где $\Delta\delta$ — отклонение элеронов. Это уравнение воспроизводит ранее выведенное (5.55).

Поскольку автопилот, описываемый уравнением (7.5), не производит стабилизации ракеты по углу тангажа, а стабилизирует ее лишь по угловой скорости $\dot{\vartheta}$, необходимо в качестве выходной величины ракеты принимать угловую скорость $\dot{\vartheta}$. В этом случае структурная

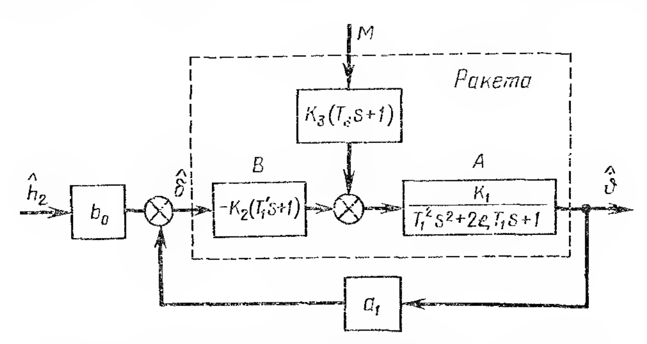


Рис. 7.2. Замкнутый контур, образуемый демпфером колебаний по углу тангажа

схема ракеты представляется частью схемы на рис. 1.6, *б*, обведенной штриховой линией, если в знаменателе передаточной функции звена *А* сомножитель s опустить, а выходную величину этого звена обозначить как $\dot{\vartheta}$.

Добавляя к полученной таким образом структурной схеме ракеты звено, соответствующее автопилоту (7.5), получим для канала тангажа структурную схему системы «ракета — автопилот» (рис. 7.2). Основываясь на уравнениях (7.6) ÷ (7.8), легко получить структурную схему контура стабилизации ракеты по крену (рис. 7.3). Структурные схемы на рис. 7.2 и 7.3 показывают, что введение в схему автопилота ДУСа обусловливает обратную связь вокруг ракеты, т. е. появление замкнутого контура.

Корневые годографы замкнутых контуров, образующихся в каналах тангажа и крена, представлены на рис. 7.4 и 7.5. Нетрудно видеть, что комплексные полюсы ракеты, имеющие малый коэффициент демпфирования ($\zeta = 0{,}1$), при введении обратной связи a_1 (в канале крена — обратной связи $k_1 s$) смещаются в сторону более высоких значений относительного коэффициента демпфирования ζ. Поэтому собственные колебания замкнутого контура, образующегося при введении ДУСа, затухают быстрее, чем собственные колебания отдельно взятой ракеты. Это обстоятельство послужило поводом называть его

контуром демпфирования, а ДУС, за счет которого он образуется, — демпфером колебаний.

Обратная связь по нормальному ускорению. Основная задача автопилота зенитной управляемой ракеты, наводимой по лучу, состоит в возвращении отклонившейся ракеты в центр луча. Нетрудно видеть, что эта задача выполняется, если система управления создает

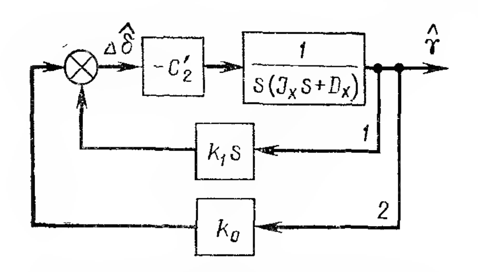


Рис. 7.3. Структурная схема системы стабилизации по крену:

1 — контур демпфирования, 2 — контур стабилизации

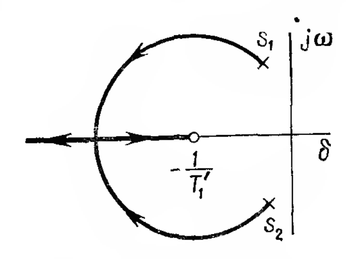


Рис. 7.4. Корневой годограф
$$G(s) = \frac{K_п (T_1' s + 1)}{T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1}$$

поперечное (нормальное) ускорение ракеты, направленное противоположно линейному рассогласованию, возникшему между ракетой и лучом (только в этом случае будет соблюден смысл регулирования).

Центростремительное (нормальное) ускорение возникает всякий раз, когда вектор скорости ракеты поворачивается, и для вертикальной плоскости определяется формулой

$$a_y = V\dot{\theta}, \tag{7.9}$$

Рис. 7.5. Корневой годограф $G(s) = K_п/(J_x s + D_x)$

где V — скорость ракеты; $\dot{\theta}$ — скорость изменения угла наклона траектории. Если ракета отклонилась от луча в положительном направлении отсчета h_2, то, как это видно из рис. 7.6, для создания ускорения $a_y \cos\alpha$ ракеты, направленного противоположно h_2, необходимо разворачивать вектор скорости $\bar{V}$ в направлении отрицательного отсчета θ. Принимая скорость $\dot{\theta}$ этого разворота пропорциональной линейному отклонению h_2, имеем

$$V\dot{\theta} = -Kh_2. \tag{7.10}$$

Итак, задача автопилота заключается в создании пропорциональной зависимости нормального ускорения $a_y = V\dot{\theta}$ от поперечного рассогласования h_2 между ракетой и лучом.

Наилучший способ обеспечения этой зависимости заключается в измерении текущего значения нормального ускорения a_y, сравнении его с желаемым значением (желаемое значение пропорционально h_2) и подаче разности желаемого и действительного значений на руль вы-

соты. Другими словами, пропорциональность между h_2 и a_y, в основном сохраняющуюся (K = const) и при изменении параметров ракеты, можно обеспечить, охватывая ракету отрицательной обратной связью по нормальному ускорению.

Иногда эту обратную связь называют обратной связью по нормальной перегрузке. *Перегрузкой* n называется отношение действующей на ракету силы (без учета силы веса) к силе веса P ракеты. Перегрузка в направлении действия подъемной силы определяется выражением $n_y = C_3\alpha/P = m_0V\dot{\theta}/(m_0g) = a_y/g$, т. е. связана с нормальным ускорением через коэффициент пропорциональности $1/g$, где g — ускорение силы тяжести.

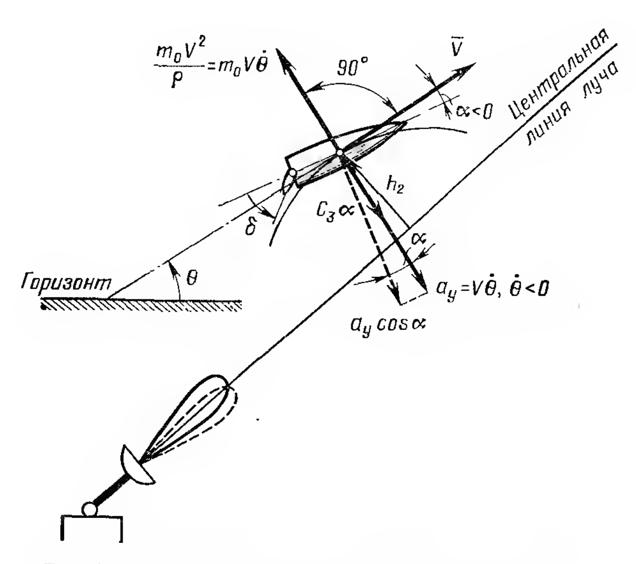


Рис. 7.6. Силы, создаваемые системой управления, при положительном отклонении h_2 ракеты от луча

С точностью до влияния силы тяжести нормальное ускорение a_y пропорционально углу атаки α ракеты. Действительно, для простоты здесь и в используемых далее уравнениях движения ракеты влияние силы тяжести не учитывается. Тогда, согласно рис. 7.6, зависящая от α подъемна сила $C_3\alpha$ уравновешивается в любой момент времени зависящей от нормального ускорения центробежной (инерционной) силой

$$m_0V^2/\rho = m_0V\dot{\theta} = m_0a_y, \tag{7.11}$$

так что

$$a_y = C_3\alpha/m_0. \tag{7.12}$$

Поэтому нормальное ускорение a_y можно определить, измерив с помощью флюгерного устройства угол атаки α. Однако этот способ применяется редко. Обычно нормальное ускорение измеряется при по-

мощи бортового акселерометра с осью чувствительности, параллельной «вертикальной» оси ракеты y_1.

Акселерометр, иначе называемый датчиком линейных ускорений (ДЛУ), во избежание зависимости его показаний от углового ускорения ракеты, устанавливается в ЦТ ракеты. Его принципиальную схему можно представить в виде винтовой пружины k, один конец которой скреплен с корпусом прибора, а другой — с массой m, имеющей возможность перемещаться в направляющих, параллельных оси пружины (рис. 7.7). Эти направляющие определяют ось чувствительности прибора.

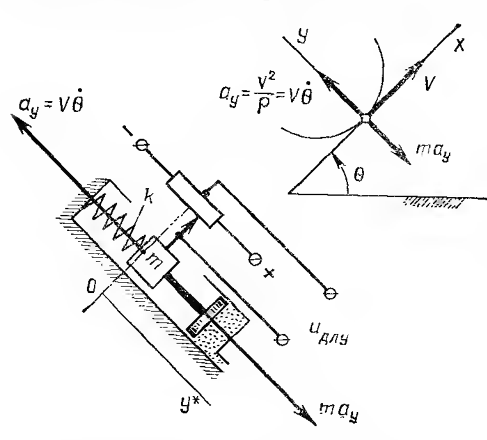


Рис. 7.7. Принципиальная схема датчика линейных ускорений

Если объект, несущий ДЛУ, движется с ускорением, причем по оси чувствительности ДЛУ направлена составляющая a_y этого ускорения, то на массу m действует инерционная сила $-ma_y$, возникающая от переносного ускорения a_y. Эта сила деформирует (сжимает или растягивает) пружину, причем величина деформации вследствие линейности пружины пропорциональна ускорению a_y. Смещение массы m от среднего положения, т. е. от положения, когда $a_y = 0$, измеряется потенциометрическим устройством, выходное напряжение $u_{ДЛУ}$ которого служит мерой ускорения a_y. При $a = 0$ деформация пружины определяется составляющей силы веса. Эта деформация не влияет на показания прибора, что достигается соответствующим расположением средней точки потенциометра.

При отсутствии трения в направляющих система «масса—пружина» совершает незатухающие собственные колебания, что делает прибор непригодным для эксплуатации. С целью демпфирования этих колебаний в схему прибора вводят воздушный демпфер, представляющий собой цилиндр с поршнем. Полость цилиндра сообщается с атмосферой через капиллярное отверстие, и энергия колебаний рассеивается трением воздуха при прохождении через капилляр.

Уравнение ДЛУ, выражающее баланс сил вдоль оси чувствительности y

$$m\ddot{y}^* + f\dot{y}^* + ky^* = ma_y. \tag{7.13}$$

В этом уравнении $f\dot{y}^*$ — сила сопротивления, создаваемая воздушным демпфером; ky^* — сила, развиваемая пружиной; $m(\ddot{y}^* - a_y)$ — инерционная сила. Инерционная сила ma_y от переносного движения (от движения ДЛУ вместе с ракетой), выступающая в относительном движении массы m как движущая, имеет линию действия, совпадающую

с осью y скоростной системы координат. Ось чувствительности ДЛУ устанавливается параллельно связанной оси y_1, составляющей со скоростной осью y угол атаки α. Поэтому вдоль оси чувствительности в качестве движущей выступает составляющая инерционной силы $ma \cos \alpha$. Вследствие малой величины угла атаки в уравнении (7.13) произведена замена $\cos \alpha = 1$.

Будем принимать за входную величину ДЛУ нормальное ускорение $a_y = V\dot{\theta}$, а за выходную — напряжение $u_{ДЛУ}$, снимаемое с потенциометрического устройства. Тогда из (7.13) получаем передаточную функцию ДЛУ

$$\frac{U_{ДЛУ}}{\hat{a}_y} = \frac{K_{ДЛУ}}{\left(T^2_{ДЛУ} s^2 + 2\zeta T_{ДЛУ} s + 1\right)}, \tag{7.14}$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_{ДЛУ} &= K_п m/k; \quad (u_{ДЛУ} = K_п y^*); \\ T_{ДЛУ} &= \sqrt{m/k}; \quad \zeta = f/2\sqrt{km}. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Чтобы результаты измерения линейного ускорения $V\dot{\theta}$ не содержали заметной ошибки, соответствующей собственным колебаниям прибора, относительный коэффициент демпфирования ДЛУ обеспечивается равным оптимальному значению $\zeta = 0{,}7$, а постоянная времени — значению, на порядок меньшему постоянной времени ракеты ($T_{ДЛУ} < T_1/10$).

Структурная схема системы «ракета — автопилот», учитывающая наличие ДЛУ, получается из схемы на рис. 7.2 добавлением кинематического звена, связывающего угловую скорость тангажа $\dot{\vartheta}$ с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вектора скорости, и звена, соответствующего ДЛУ.

Согласно уравнениям (5.57 а), (5.59), передаточная функция кинематического звена

$$\frac{\hat{\dot{\theta}}}{\hat{\dot{\vartheta}}} = \frac{1}{(T_1' s + 1)}, \tag{7.16}$$

где постоянная времени T_1' совпадает с постоянной времени звена B ракеты (см. рис. 7.2). В (5.57 а) членом $m_0 g \sin \theta_0 \dot{\theta}$ пренебрегаем.

Структурная схема системы «ракета — автопилот» для вертикальной плоскости, соответствующая принципиальной схеме на рис. 7.1, изображена на рис. 7.8. Внешний возмущающий момент M здесь опущен, что позволило объединить звенья A и B в одно звено, представляющее ракету (звено с коэффициентом усиления $K_{об}$).

Переходя к идеальному автопилоту, положим постоянные времени ДУСа, ДЛУ, усилителя У и рулевой машинки РМ равными нулю, т. е. будем считать эти звенья безынерционными. Тогда передаточными функциями указанных звеньев будут коэффициенты усиления $K_{ДУС}$, $K_{ДЛУ}$, $K_у$, $K_{РМ}$. Вводя обозначения $a_1 = K_{ДУС} K_у K_{РМ}$; $C_1 = K_{ДЛУ} K_у K_{РМ}$, $b_0 = K_0 K_у K_{РМ}$, можно структурную схему «ракета — идеализированный автопилот» представить так, как показано на рис. 7.9.

Если контур демпфирования *1* заменить эквивалентным звеном

$$\frac{\dot{\vartheta}}{\delta_1} = -\frac{K^*_{об}(T'_1 s+1)}{T^{*2}_1 s^2 + 2\zeta^*_1 T^*_1 s + 1}, \qquad (7.17)$$

где

$$T^*_1 = \frac{T_1}{\sqrt{1+a_1 K_{об}}}, \quad K^*_{об} = \frac{K_{об}}{1+a_1 K_{об}}, \qquad (7.18а)$$

$$\zeta^*_1 = \frac{\zeta_1}{\sqrt{1+a_1 K_{об}}} + \frac{a_1 K_{об} T'_1}{2T_1\sqrt{1+a_1 K_{об}}}, \qquad (7.18б)$$

то приходим к уже известному из корневого годографа результату, что введение ДУСа существенно увеличивает коэффициент демпфирования ($\zeta^*_1 \gg \zeta_1$) и несколько уменьшает постоянную времени

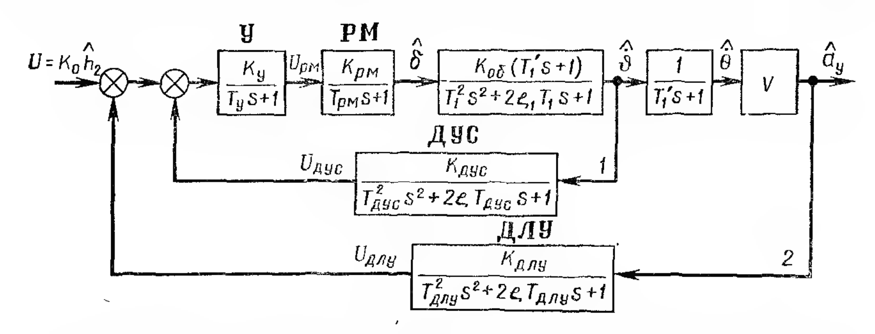


Рис. 7.8. Система «ракета — автопилот» с контуром регулирования по перегрузке:

1 — контур демпфирования; *2* — контур регулирования по перегрузке

($T^*_1 < T_1$). Можно путем выбора a_1 установить оптимальное значение относительного коэффициента демпфирования $\zeta^*_1 = 0{,}7$. Но при этом, как видно из (7.18а), исчезает возможность дальнейшего уменьшения постоянной времени и, следовательно, повышения быстродействия системы «ракета — автопилот».

Введение обратной связи по перегрузке как раз преследует цель дальнейшего уменьшения постоянной времени при сохранении оптимального значения относительного коэффициента демпфирования, т. е. служит для увеличения быстродействия в отработке системой «ракета — автопилот» команды h_2 со стороны контура наведения. Действительно, составляя для показанного на рис. 7.10 контура регулирования по перегрузке (этот контур получен из схемы на рис. 7.9 заменой контура демпфирования эквивалентным звеном (7.17) передаточную функцию, находим

$$\frac{a_y}{\delta_2} = \frac{K^*_{об} V}{(1+C_1 K^*_{об} V)(T^{**2}_1 s^2 + 2\zeta^{**}_1 T^{**}_1 s + 1)}, \qquad (7.19)$$

где

$$T^{**}_1 = T^*_1/\sqrt{1+C_1 K^*_{об} V}; \qquad (7.20а)$$

$$\zeta^{**}_1 = \zeta^*_1/\sqrt{1+C_1 K^*_{об} V}. \qquad (7.20б)$$

Как видно из (7.20а), при введении обратной связи по перегрузке постоянная времени системы уменьшается в $\sqrt{1 + C_1 K_{об}^* V}$ раз. В такое же число раз уменьшается и относительный коэффициент демпфирования. Однако увеличением коэффициента усиления ДУСа (коэффициента a_1) можно относительный коэффициент демпфирования вернуть к оптимальному значению $\zeta = 0{,}7$, не увеличивая постоянной времени системы.

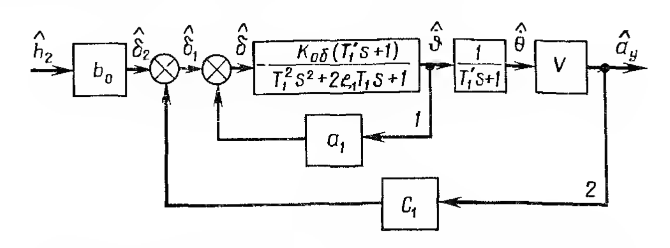


Рис. 7.9. Система «ракета — идеализированный автопилот»:

1 — контур демпфирования; *2* — контур регулирования по перегрузке

Более точный выбор коэффициентов усиления ДУСа и ДЛУ основывается на исследовании полной схемы (см. рис. 7.8) методом логарифмического корневого годографа. Построив сначала логарифмический корневой годограф внутреннего контура *1*, выбираем по нему значение $K_{ДУС}$, обеспечивающее демпфирование ζ_1^* корней ракеты, превышающее оптимальное значение $\zeta = 0{,}7$ (например, $\zeta_1^* = 0{,}85$). Имеются в виду корни, изображаемые комплексными ветвями корневого

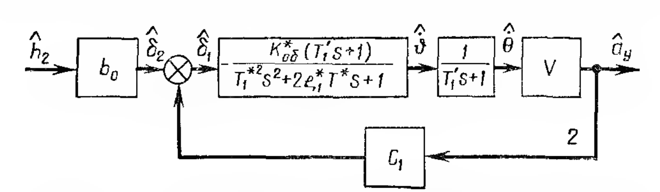


Рис. 7.10. Структурная схема, эквивалентная схеме, показанной на рис. 7.9

годографа, начинающимися в полюсах передаточной функции ракеты. Заменяем внутренний контур *1* эквивалентным звеном и, зная корни этого контура, представляем знаменатель передаточной функции эквивалентного звена в виде произведения элементарных множителей. Среди этих множителей будет квадратичный трехчлен с коэффициентом демпфирования ζ_1^*.

Теперь без особого труда можно построить ЛКГ внешнего контура *2*. По этому ЛКГ определяем коэффициент усиления $K_{ДЛУ}$, которому соответствует горизонталь, пересекающая порожденную упомянутым трехчленом комплексную ветвь в точке, характеризуемой тре-

буемыми значениями недемпфированной частоты ω_{n1}^{**} и относительного коэффициента демпфирования ζ_1^{**}.

Значения ω_{n1}^{**} и ζ_1^{**} определяют качество всей двухконтурной замкнутой системы, так как корни этой системы s_1, $s_2 = -\zeta_1^{**}\omega_{n1}^{**} \pm \pm j\omega_{n1}^{**}\sqrt{1 - \zeta_1^{**}}$ являются доминирующими, т. е. в основном определяют вид переходного процесса. Чем больше ω_{n1}^{**} ($\omega_{n1}^{**} = 1/T_1^{**}$), тем при прочих равных условиях быстрее заканчивается переходный процесс указанной системы. В данном случае коэффициент демпфирования ζ_1^{**} должен выбираться по возможности ближе к оптимальному значению, равному 0,7.

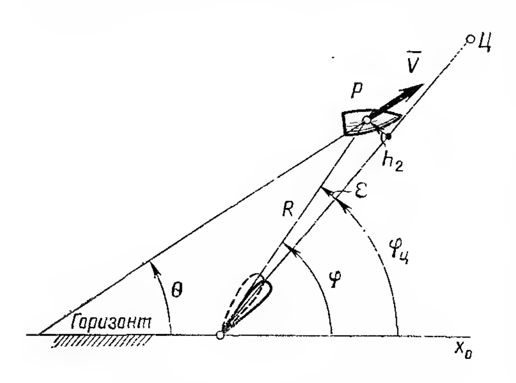


Рис. 7.11. Углы места ракеты и цели при плоском наведении

По мере увеличения $K_{ДЛУ}$ относительный коэффициент демпфирования ζ_1^{**} доминирующих корней уменьшается. Поэтому начальное значение ζ_1^* данного коэффициента, т. е. значение при $K_{ДЛУ}=0$, выбирается (о чем упомянуто ранее) более высоким, чем 0,7.

Комплексные корни двухконтурной замкнутой системы, порожденные ДУСом и ДЛУ, обусловливают в переходном процессе колебательные составляющие, амплитуда которых на порядок меньше амплитуды доминирующей колебательной составляющей. По этой причине, не ухудшая качества регулирования, можно допускать демпфирование ζ этих составляющих, значительно меньшее оптимального.

Контур наведения в вертикальной плоскости. В состав контура наведения входит бортовой приемник, определяющий угол рассогласования ε между линией визирования ракеты и центральной линией луча, устройство выработки команд, преобразующее напряжение приемника в напряжение, пропорциональное линейному рассогласованию h_2, и рассмотренная выше (см. рис. 7.8) система «ракета — автопилот». Кроме того, структурная схема должна содержать элементы, за счет которых происходит замыкание контура, т. е. осуществляется связь между нормальным ускорением a_y и указанным рассогласованием ε.

Если φ и $\varphi_ц$ — углы места ракеты и цели, т. е. углы, составленные с осью x_0 земной системы соответственно линией визирования ракеты и центральной линией луча (рис. 7.11), то

$$\varepsilon = \varphi - \varphi_ц. \qquad (7.21)$$

Как уже отмечалось, угол рассогласования ε умножается на дальность $R(t)$ ракеты от станции наведения, предполагаемую известной функции времени, в результате чего получается линейное отклонение h_2 ракеты от центра луча (угол ε считается малым). Переходя

в (7.21) от полных переменных к вариациям (вариации обозначаются на структурной схеме теми же буквами $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}_ц$, что и полные переменные) и производя «замораживание» дальности R, легко получить часть структурной схемы контура наведения, обозначенную на рис. 7.12 как *П + УВК*.

Теперь остается установить связь между нормальным ускорением a_y и вариацией φ угла места ракеты [11]. Для этого оси системы координат $x_0y_0z_0$, связанной с Землей, в отличие от обычного расположения, ориентируем так, чтобы они воспроизводили соответственные оси системы луча $x_лy_лz_л$ для момента начала исследования t_0. Полагая, что ракета, находившаяся в момент t_0 на оси x_0, совершает маневр с положительной угловой скоростью $\dot{\theta}$, найдем составляющие нормального ускорения a_y по осям земной системы.

Принимая скорость ракеты по модулю постоянной (или мало изменяющейся), из рис. 7.13 находим, что составляющая ускорения ракеты по оси y_0 определяется выражением $a_y \cos\theta$. Однако, вследствие малой величины угла θ (этот угол является вариацией угла наклона траектории) можно положить $\cos\theta \approx 1$ и выражение ускорения, с которым изменяется ордината y_0 ЦТ ракеты, записать в виде

$$\ddot{y}_0 = a_y \cos\theta \approx a_y. \quad (7.22)$$

Переходя в область изображений по Лапласу, полу-

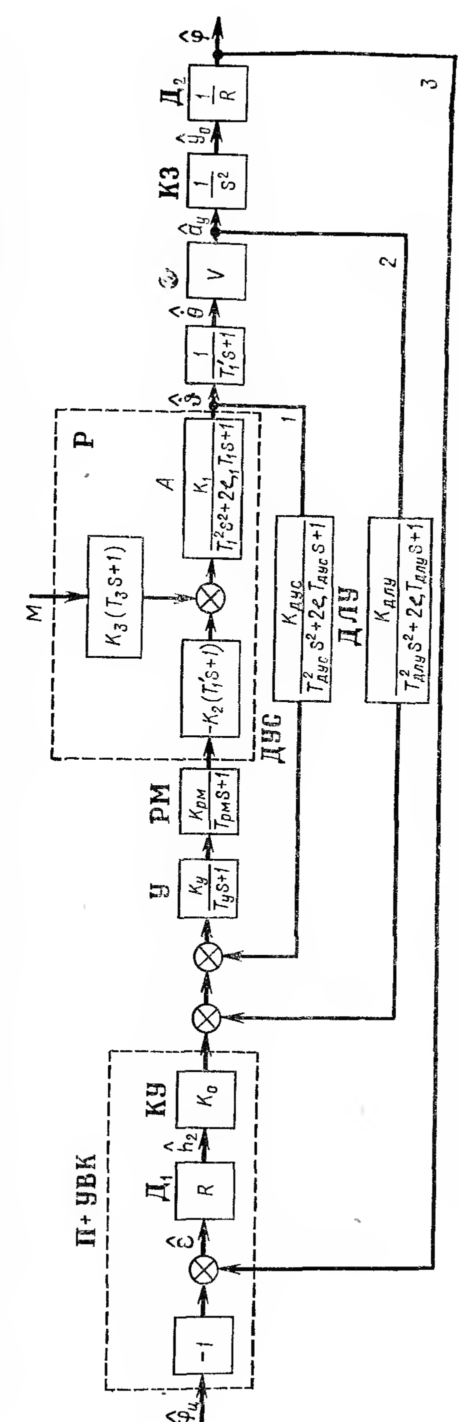


Рис. 7.12. Структурная схема контура наведения по лучу в вертикальной плоскости

чаем следующую передаточную функцию, связывающую величины a_y и y_0:

$$\hat{y}_0/\hat{a}_y = 1/s^2. \qquad (7.23)$$

Связь между вариацией φ угла места ракеты и вариацией y_0 ординаты ракеты легко найти из рис. 7.13. Имеем

$$\varphi = y_0/R. \qquad (7.24)$$

Выражения (7.23) и (7.24) определяют искомые звенья связи *КЗ* и $Д_2$ контура наведения (см. рис. 7.12).

При сделанных предположениях передаточная функция звена *КЗ* (оно называется кинематическим звеном) является точной, в то время как передаточная функция звена $Д_2$ справедлива лишь при «замороженной», т. е. неизменной во времени, дальности R.

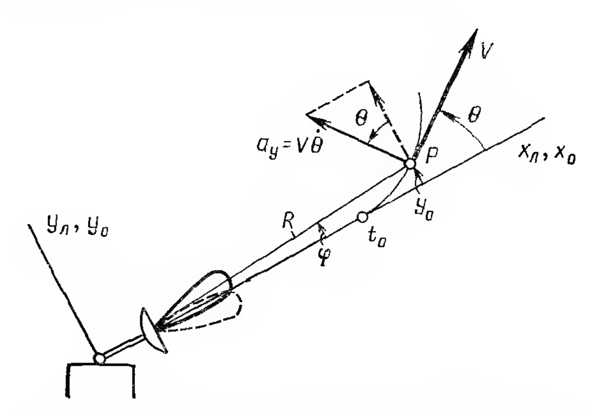


Рис. 7.13. Координаты (вариации координат) ракеты при наклонном расположении земной системы $x_0y_0z_0$

Если, как это здесь сделано, принять метод «замораживания коэффициентов», то можно звенья $Д_1$ и $Д_2$ из контура наведения исключить, так как произведение их передаточных функций равно единице. Параметры оставшихся звеньев от времени не зависят, что позволяет всю систему теленаведения исследовать методами, обычно применяемыми при анализе стационарных линейных систем (например, методом корневого годографа).

Как видно из рис. 7.12, структурная схема наведения ракеты по лучу аналогична структурной схеме следящей системы с астатизмом второго порядка. Для обеспечения устойчивости системы со столь высоким порядком астатизма приходится применять корректирующие устройства. Например, вместо показанного на рис. 7.12 звена *КУ* часто применяется звено с передаточной функцией $K_0 + K_1s$.

Помимо решения задачи стабилизации синтез системы теленаведения означает и решение типичной для следящих систем задачи повышения динамической точности (уменьшение коэффициентов ошибок,

применение компенсирующих цепей разомкнутого цикла, снижение ошибки от шумовых помех и др.). Эти задачи здесь не рассматриваются.

Контур наведения в наклонной плоскости. Контур наведения в наклонной плоскости x_0z_0 (плоскость x_0z_0 земной системы считается наклоненной к горизонту, как было описано выше) в принципиальном отношении не отличается от показанного на рис. 7.12. Действительно, уравнения движения ракеты относительно оси рыскания, а следовательно, и передаточные функции ракеты сохраняют свой вид — см. (1.7) ÷ (1.9) — и при наклонной системе отсчета $x_0y_0z_0$. Поскольку угол поворота траектории Ψ, как и угол рыскания ψ, отсчитывается теперь в наклонной плоскости x_0z_0 (рис. 7.14), между координатой

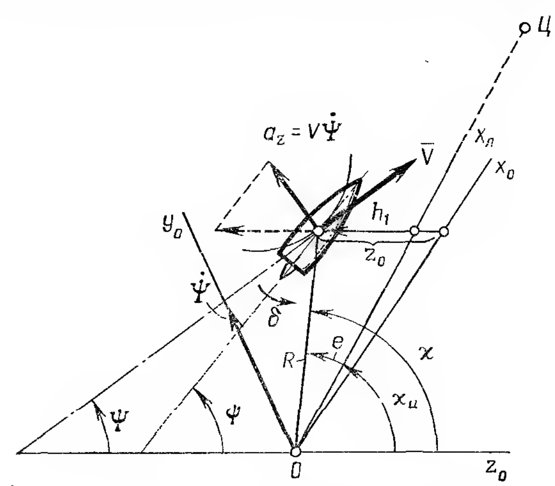


Рис. 7.14. Направление положительного отсчета координат ракеты и цели в наклонной плоскости

z_0 центра тяжести ракеты и нормальным ускорением $a_z = V\dot{\Psi}$, а также между z_0 и вариацией азимута χ ракеты имеют место такие же соотношения, что и (7.22), (7.24):

$$\ddot{z}_0 \approx -a_z; \tag{7.25}$$

$$\chi = -z_0/R. \tag{7.26}$$

Рассогласование e в азимутах цели и ракеты определяется теперь уравнением

$$e = \chi - \chi_ц. \tag{7.27}$$

Чтобы установить связь между линейным рассогласованием h_1 и угловой скоростью $\dot{\Psi}$ поворота вектора скорости, необходимо так же, как это было сделано для вертикальной плоскости, учесть смысл регулирования. Из рис. 7.14 видно, что положительное рассогласование h_1 уменьшается только при отрицательной угловой скорости $\dot{\Psi}$. Поэ-

тому в случае безынерционной системы «ракета — автопилот» искомая связь

$$V\dot{\Psi} = -Kh_1. \tag{7.28}$$

Отрицательная угловая скорость $\dot{\Psi}$ возникает при положительном отклонении руля, так что для выполнения (7.28) необходимо, чтобы

$$\delta = K_0 h_1. \tag{7.29}$$

Учитывая (7.25) ÷ (7.29), приходим к выводу, что структурная схема контура наведения в наклонной плоскости отличается от изображенной на рис. 7.12 только обозначениями переменных.

§ 7.2. ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМЫЕ ВРАЩАЮЩИЕСЯ РАКЕТЫ (Х—4)

Ошибка системы теленаведения характеризуется линейным рассогласованием h между ракетой и линией визирования цели, имеющим место в расчетный момент встречи. Как во всякой следящей системе, ошибка зависит от производных входного сигнала, в данном случае от второй и более высоких производных азимутального угла и угла места цели (рис. 7.15), от шумовых помех и от внешнего возмущающего момента.

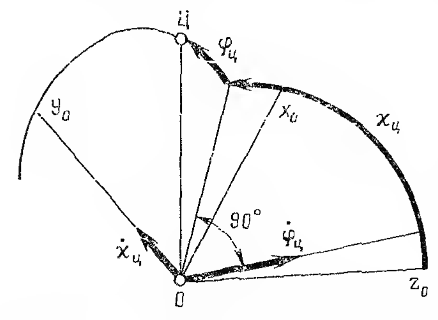


Рис. 7.15. Азимут $\chi_ц$ и угол места $\varphi_ц$ цели в наклонной земной системе координат $x_0y_0z_0$

Рассмотрим составляющую ошибки от внешнего возмущающего момента, каковым является момент m $[M(s) = L(m)]$ вокруг ЦТ ракеты, вызванный, например, некоторой несимметрией ее корпуса (см. рис. 7.12). По рассогласованию h в отношении возмущающего момента M осуществляется статическое регулирование, на что указывает отсутствие интегрирующих звеньев в цепи обратной связи (в системе, показанной на рис. 7.12, обратная связь состоит из звеньев $КУ$, $У$, $РМ$ и $-K_2$). Следовательно, установившаяся ошибка $h_{уст}$ содержит составляющую, пропорциональную моменту m. В невращающихся ракетах эту составляющую ошибки можно уменьшить, увеличивая коэффициент усиления обратной связи, например, коэффициент усилителя У. Однако при этом ухудшается устойчивость контура наведения.

Другой путь увеличения точности системы теленаведения состоит в придании ракете вращения вокруг продольной оси, благодаря которому действие внешнего момента m осредняется и не приводит к статическому отклонению. Дело в том, что момент m возникает из-за технологических дефектов (например, из-за несимметрии корпуса, из-за перекоса ракетного двигателя относительно продольной оси) и пло-

скостью действия этого момента является одна из жестко фиксированных относительно корпуса продольных плоскостей ракеты. При вращении ракеты вокруг продольной оси плоскость действия момента m также вращается, в результате чего вокруг поперечной оси, сохраняющей, например, горизонтальное положение, вместо постоянного $m = \text{const}$ действует синусоидально изменяющийся момент $m_0 \sin \omega t$ с нулевым средним значением.

Равенство нулю среднего значения возмущающего момента в данном случае исключает возможность возникновения статической ошибки по рассогласованию h_2 в вертикальной плоскости. По тем же соображениям можно заключить, что статическая ошибка отсутствует и в наклонной плоскости.

Двухканальная система управления. Чтобы управлять угловым положением продольной оси вращающейся ракеты, т. е. изменять угол рыскания и угол тангажа, надо иметь возможность создавать вокруг взаимно перпендикулярных поперечных осей, одна из которых все время горизонтальна (эти оси не имеют жесткой связи с корпусом), управляющие моменты. Как и для невращающейся ракеты, такая возможность обеспечивается применением свободного гироскопа крена.

С осью наружного кольца гироскопа крена, направленной по продольной оси ракеты, связываются роторы двух вращающихся синусно-косинусных трансформаторов (СКВТ). Статоры этих трансформаторов, будучи связаны с корпусом ракеты, вращаются вместе с ракетой относительно неподвижных роторов. Так как гироскоп крена суть свободный астатический гироскоп, угол поворота статора относительно ротора СКВТ равен углу крена γ ракеты.

Оси однофазных обмоток, уложенных на роторах, взаимно перпендикулярны. Напротив, соответственные обмотки статоров параллельны. К ротору СКВТ$_2$, изображенного на рис. 7.16, подводится напряжение переменного тока, величина и фаза которого зависят соответственно от величины и знака линейного рассогласования h_2 в вертикальной плоскости, а к ротору СКВТ$_1$ — напряжение, зависящее от рассогласования h_1 в наклонной плоскости (рассматривается случай управления ракетой по лучу).

Предположим, что между ракетой и лучом возникло рассогласование h_2 в вертикальной плоскости. При любом угловом положении ракеты по крену это рассогласование создает момент, действующий на ракету только вокруг горизонтальной поперечной оси, т. е. момент, сводящий рассогласование h_2 к нулю по кратчайшему пути.

Действительно, при крене $\gamma = 0$ на *РМ2* поступает напряжение $u_2 = K^* h_2 \cos \gamma = K^* h_2$, тогда как к *РМ1* никакого напряжения не подводится. Руль *2*, выполняющий при $\gamma = 0$ роль руля высоты, своим отклонением $\delta_2 = K' h_2$ уменьшает рассогласование h_2.

При произвольном угле крена γ рули *1* и *2*, будучи отклонены на углы $\delta_1 = K^{**} h_2 \sin \gamma$, $\delta_2 = K^{**} h_2 \cos \gamma$, создают в продольных плоскостях ракеты $x_1 y_1$, $x_1 z_1$, составляющих с вертикальной плоскостью углы γ и $90° + \gamma$, пары сил, характеризуемые моментами $M_z = K h_2 \cos \gamma$ и $M_y = K h_2 \sin \gamma$ (рули вместе с ракетой вращаются вокруг продольной оси). Вектор M_z', равный геометрической сумме

моментов этих пар, как и должно быть, направлен по горизонтальной поперечной оси ракеты z' и по-прежнему сводит рассогласование h_2 к нулю по кратчайшему пути (рис. 7.17).

Доказывается, что и в общем случае, когда обе составляющие h_1 и h_2 рассогласования h отличны от нуля, двухканальная система управления ликвидирует рассогласование h по кратчайшему пути.

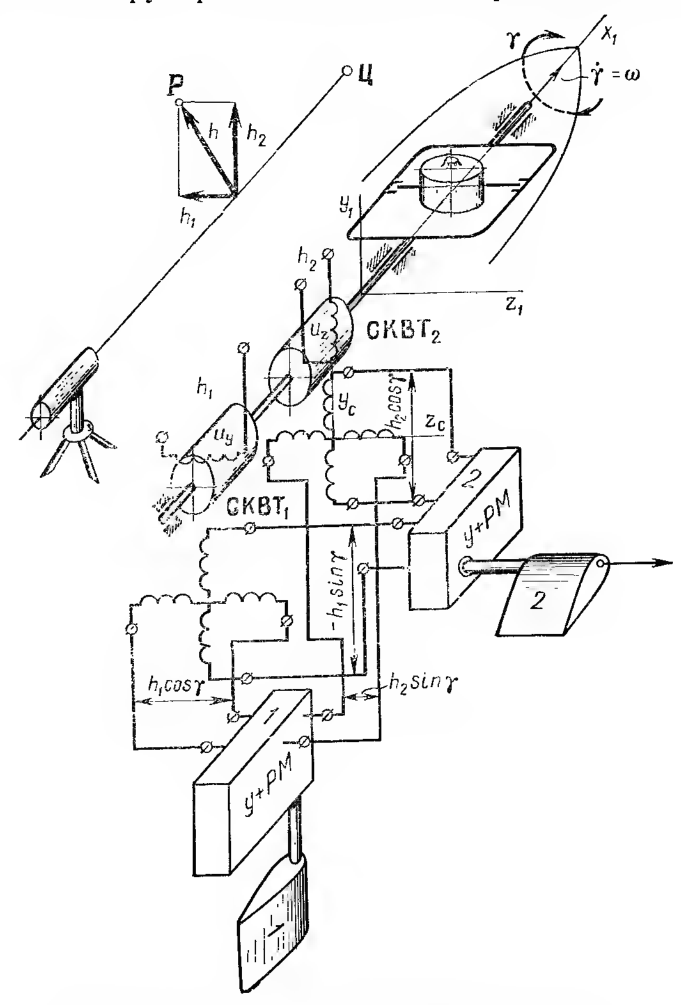


Рис. 7.16. Принципиальная схема автопилота вращающейся ракеты с СКВТ

Методы анализа движения вращающейся ракеты. Будем считать ракету осесимметричным телом с моментом инерции J относительно любой проходящей через центр тяжести поперечной оси, значительно превосходящим момент инерции J_x относительно продольной оси. Пусть ω_x, ω_y, ω_z — составляющие угловой скорости ракеты отно-

сительно земной системы координат $x_0y_0z_0$, направленные по осям жестко связанной с ракетой системы $x_1y_1z_1$. Принимая земную систему за инерциальную, т. е. пренебрегая влиянием угловой скорости земной системы, можно уравнения движения ракеты записать в следующем виде (динамические уравнения Эйлера):

$$J\dot{\omega}_y-(J-J_x)\,\omega_x\,\omega_z=M_y; \qquad (7.30а)$$

$$J\dot{\omega}_z+(J-J_x)\,\omega_x\,\omega_y=M_z; \qquad (7.30б)$$

$$J_x\dot{\omega}_x=M_x. \qquad (7.30в)$$

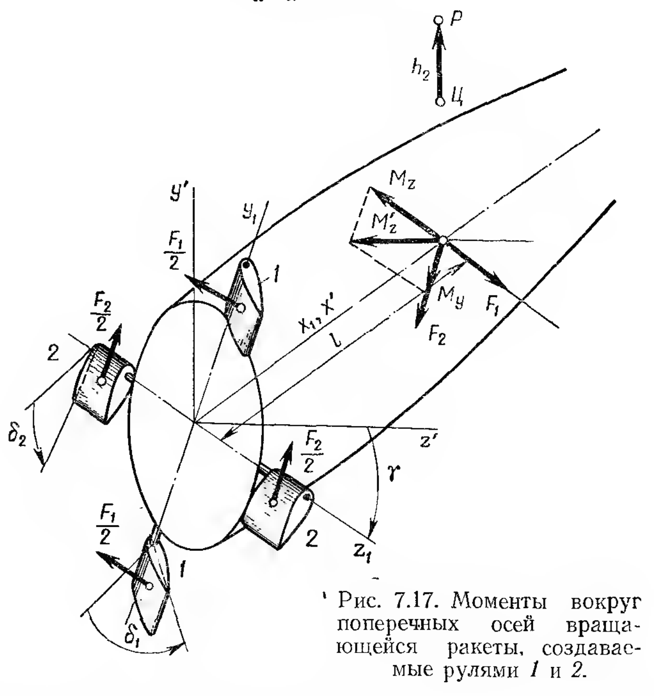


Рис. 7.17. Моменты вокруг поперечных осей вращающейся ракеты, создаваемые рулями *1* и *2*.

Уравнения (7.30) вытекают из (5.1б), (5.14), если в этих уравнениях произвести следующую замену обозначений: $p=\omega_x$; $q=\omega_y$; $r=\omega_z$; $J_y=J_z=J$.

Вращение ракеты вокруг продольной оси можно, например, создать за счет перекоса плоскостей хвостового оперения. При постоянной скорости полета V движущему моменту, возникающему из-за указанного перекоса, противодействует пропорциональный скорости вращения ω_x момент сопротивления (он обусловливается плоскостями хвостового оперения), вследствие чего в установившемся режиме результирующий момент M_x вокруг продольной оси равен нулю и согласно уравнению (7.30 в) $\omega_x=\text{const}$. Вводя обозначение $H_1=(J-J_x)\,\omega_x$, перепишем уравнения (7.30) в виде

$$J\dot{\omega}_y-H_1\omega_z=M_y; \quad J\dot{\omega}_z+H_1\omega_y=M_z. \qquad (7.31)$$

Здесь $H_1=\text{const}$.

Для определения углового положения ракеты в системе отсчета $x_0y_0z_0$ необходимо уравнения (7.31) дополнить кинематическими уравнениями, связывающими углы Эйлера ψ, ϑ, γ с угловыми скоростями ω_x, ω_y, ω_z. Так как положение системы $x_1y_1z_1$ относительно системы отсчета $x_0y_0z_0$ определяется углами ψ, ϑ, γ, угловые скорости ω_x, ω_y, ω_z представляют собой не что иное, как проекции векторов $\dot\psi$, $\dot\vartheta$, $\dot\gamma$ на оси x_1, y_1, z_1. Принимая последовательность поворотов ψ, ϑ, γ, из рис. 4.1 легко находим уравнения:

$$\omega_x = \dot\gamma + \dot\psi \sin\vartheta; \tag{7.32а}$$

$$\omega_y = \dot\psi \cos\vartheta \cos\gamma + \dot\vartheta \sin\gamma; \tag{7.32б}$$

$$\omega_z = -\dot\psi \cos\vartheta \sin\gamma + \dot\vartheta \cos\gamma, \tag{7.32в}$$

называемые кинематическими уравнениями Эйлера.

Разрешив систему (7.32) относительно $\dot\psi$, $\dot\vartheta$, $\dot\gamma$, получаем искомые кинематические уравнения:

$$\dot\psi = (1/\cos\vartheta)(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma) \tag{7.33а}$$

$$\dot\vartheta = \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma \tag{7.33б}$$

$$\dot\gamma = \omega_x - \operatorname{tg}\vartheta\,(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma). \tag{7.33в}$$

Согласно рис. 7.16, в рулевые тракты *1*, *2* подаются сигналы, при которых рули создают вокруг ЦТ ракеты следующие моменты, направленные по осям y_1, z_1 связанной системы:

$$M_y = K(h_1 \cos\gamma + h_2 \sin\gamma); \tag{7.34а}$$

$$M_z = K(-h_1 \sin\gamma + h_2 \cos\gamma). \tag{7.34б}$$

К ракете приложены также флюгерные моменты и моменты аэродинамического демпфирования. Но пока эти моменты не учитываем.

Решая уравнения (7.31), найдем сначала угловые скорости ракеты вокруг связанных поперечных осей. Момент инерции J_x ракеты относительно продольной оси намного меньше момента инерции J относительно поперечной оси и в дальнейшем принимается равным нулю. Тогда $H_1 = J\omega_x$, где $\omega_x = \dot\gamma + \dot\psi \sin\vartheta = \mathrm{const}$. Будем предполагать собственное вращение $\dot\gamma$ ракеты достаточно быстрым, чтобы можно было членом $\dot\psi \sin\vartheta$, по сравнению с $\dot\gamma$, пренебречь. В этом случае $\omega_x = \dot\gamma = \mathrm{const}$, так что $\gamma = \omega_x t$. Вводя обозначение $\omega_x = \omega$ и подставляя моменты (7.34) в уравнения (7.31), сводим эти уравнения к виду:

$$\left.\begin{aligned} \dot\omega_y - \omega\omega_z &= K' h_1 \cos\omega t + K' h_2 \sin\omega t; \\ \dot\omega_z + \omega\omega_y &= -K' h_1 \sin\omega t + K' h_2 \cos\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

где

$$K' = K/J. \tag{7.36}$$

Примем следующие начальные условия:

$$t = 0;\ \omega_y = 0;\ \omega_z = 0. \tag{7.37}$$

Тогда в области изображений по Лапласу будем иметь:

$$s\hat{\omega}_y - \omega\hat{\omega}_z = \frac{K' h_1 s}{(s^2+\omega^2)} + \frac{K' h_2 \omega}{(s^2+\omega^2)};$$

$$s\hat{\omega}_z + \omega\hat{\omega}_y = -\frac{K' h_1 \omega}{(s^2+\omega^2)} + \frac{K' h_2 s}{(s^2+\omega^2)}.$$

Разрешая эти уравнения относительно искомых угловых скоростей, получим

$$\hat{\omega}_y = \frac{K' h_1 (s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2} + \frac{2K' h_2 \omega s}{(s^2+\omega^2)^2};$$

$$\hat{\omega}_z = -\frac{2K' h_1 \omega s}{(s^2+\omega^2)^2} + \frac{K' h_2 (s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2},$$

или после перехода в область оригиналов:

$$\left.\begin{aligned} \omega_y &= K' h_1 t \cos\omega t + K' h_2 t \sin\omega t; \\ \omega_z &= -K' h_1 t \sin\omega t + K' h_2 t \cos\omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (7.38)$$

Подставим теперь выражения (7.38) в кинематические уравнения (7.33а), (7.33б). После несложных выкладок получим

$$\dot{\psi} = (1/\cos\vartheta)\, K' h_1 t; \qquad \dot{\vartheta} = K' h_2 t. \qquad (7.39)$$

Таким образом, синусоидальные моменты M_y, M_z, действующие вокруг связанных осей вращающейся ракеты, вызывают изменение угла рыскания и угла тангажа ракеты со скоростью, не содержащей синусоидальных составляющих (детектирующее действие). При этом проекция h_2 линейного отклонения h ракеты от луча на вертикальную плоскость вызывает только пропорциональную скорость изменения угла тангажа, а проекция h_1 на наклонную плоскость — только скорость изменения угла рыскания, что приводит к радиальной коррекции ракеты по отношению к лучу, т. е. к ликвидации отклонения h по кратчайшему пути.

Конечно, выражаемый формулами (7.39) результат можно получить и непосредственно, используя традиционные подходы. Именно, динамические уравнения Эйлера можно записать в проекциях на оси системы $x'y'z'$, участвующей вместе с ракетой в движении рыскания и тангажа, но не принимающей участия в движении крена. Эта система называется системой Резаля.

Положение системы $x'y'z'$ в системе отсчета $x_0y_0z_0$ характеризуется теми же углами рыскания ψ и тангажа ϑ, что были введены для характеристики положения связанной системы $x_1y_1z_1$ и, следовательно, отклонение связанной системы от системы Резаля $x'y'z'$ образуется только за счет угла крена γ (см. рис. 7.17). Поскольку при $\gamma = 0$ системы $x_1y_1z_1$ и $x'y'z'$ совпадают, формулы (7.33) для осей Резаля принимают более простой вид:

$$\dot{\psi} = \omega'_y/\cos\vartheta; \qquad \dot{\vartheta} = \omega'_z; \qquad 0 = \omega'_x - \operatorname{tg}\vartheta\,\omega'_y, \qquad (7.40)$$

где ω'_x, ω'_y, ω'_z — проекции на оси x', y', z' угловой скорости системы Резаля $x'y'z'$ относительно системы отсчета $x_0y_0z_0$.

Динамические уравнения Эйлера, записанные в проекциях на оси Резаля:

$$J\dot{\omega}'_y - J\omega'_z\omega'_x + J_x(\omega'_x + \dot{\gamma})\omega'_z = M'_y; \qquad (7.41а)$$

$$J\dot{\omega}'_z + J\omega'_y\omega'_x - J_x(\omega'_x + \dot{\gamma})\omega'_y = M'_z; \qquad (7.41б)$$

$$J_x(\dot{\omega}'_x + \ddot{\gamma}) = M'_x. \qquad (7.41в)$$

В этих уравнениях $J\omega'_y$, $J\omega'_z$, $J_x(\omega'_x + \dot{\gamma})$ суть проекции кинетического момента ракеты на оси Резаля ($\dot{\gamma}$ — угловая скорость ракеты относительно системы Резаля, $\omega'_x + \dot{\gamma}$ — составляющая абсолютной угловой скорости по продольной оси x').

Моменты вокруг осей Резаля y', z' получаются проектированием на эти оси моментов M_y, M_z относительно связанных осей и согласно формулам (7.34) и рис. 7.18 определяются выражениями:

$$M'_y = M_y\cos\gamma - M_z\sin\gamma = K(h_1\cos\gamma + h_2\sin\gamma)\cos\gamma - \\ -K(-h_1\sin\gamma + h_2\cos\gamma)\sin\gamma = Kh_1; \qquad (7.42)$$

$$M'_z = M_y\sin\gamma + M_z\cos\gamma = K(h_1\cos\gamma + h_2\sin\gamma)\sin\gamma + \\ +K(-h_1\sin\gamma + h_2\cos\gamma)\cos\gamma = Kh_2.$$

Момент M'_x вокруг продольной оси равен нулю, так что согласно уравнению (7.41 в) $\omega'_x + \dot{\gamma} = \text{const}$ и, следовательно, $J_x(\omega'_x + \dot{\gamma}) = H = \text{const}$.

Рассматривая ω'_x, ω'_y, ω'_z как малые отклонения (вариации) от равновесных значений $\omega'_{x0} = \omega'_{y0} = \omega'_{z0} = 0$, пренебрегаем произведениями отклонений, в данном случае гироскопическими моментами $J\omega'_z\omega'_x$ и $J\omega'_y\omega'_x$. В результате получаем широко используемые в прикладной теории гироскопов уравнения:

$$J\dot{\omega}'_y + H\omega'_z = M'_y; \qquad J\dot{\omega}'_z - H\omega'_y = M'_z. \qquad (7.43)$$

Учитывая выражения моментов (7.42) и сделанное выше предположение $J_x = 0$ (так что $H = 0$), приходим к уравнениям ракеты:

$$J\dot{\omega}'_y = Kh_1; \qquad J\dot{\omega}'_z = Kh_2.$$

Решая эти уравнения при нулевых начальных условиях, находим

$$\omega'_y = K'h_1t; \qquad \omega'_z = K'h_2t, \qquad (7.44)$$

где K' определяется формулой (7.36).

Путем подстановки уравнений (7.44) в формулы (7.40) можно убедиться, что получающиеся выражения $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ не отличаются от выражений этих же величин, найденных ранее интегрированием уравнений в связанных осях и пересчетом решения к углам Эйлера. Такое совпадение наблюдается и при любых других внешних моментах, действующих вокруг поперечных осей.

Оба метода исследования (один — запись уравнений движения в проекциях на связанные оси с последующим пересчетом решения к углам Эйлера, другой — запись уравнений в проекциях на оси Резаля) являются приближенными. Приближенность первого метода

заключается в пренебрежении составляющей $\dot{\psi} \sin \vartheta$ по сравнению с угловой скоростью собственного вращения $\dot{\gamma}$, тогда как приближенность второго метода обусловливается отбрасыванием произведений угловых скоростей $\omega'_x \omega'_y$, $\omega'_x \omega'_z$.

В прикладной теории гироскопов неучет гироскопических моментов $J\omega'_y\omega'_x$, $J\omega'_z\omega'_x$, проистекающих от вращения системы Резаля, обосновывается тем, что они много меньше гироскопических моментов $H\omega'_y$, $H\omega'_z$, зависящих от кинетического момента ротора H. Для вращающейся ракеты, имеющей небольшой кинетический момент H, такое обоснование неприемлемо. Однако полное совпадение резуль-

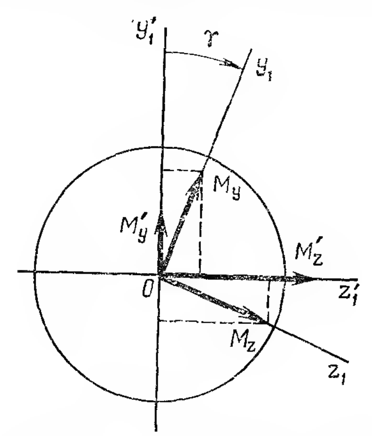


Рис. 7.18. Относительное положение систем координат (при наблюдении со стороны кормовой части)

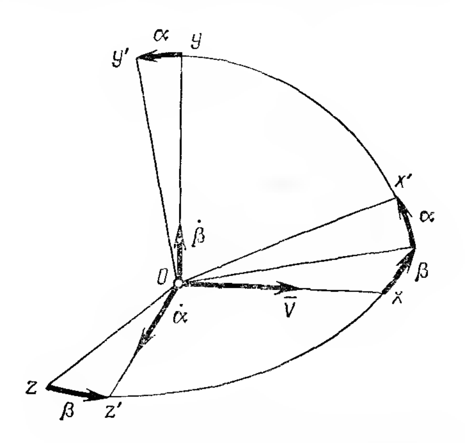


Рис. 7.19. Скоростная система координат xyz и система Резаля $x'y'z'$

татов, полученных выше обоими методами для предельного случая $H = 0$, позволяет считать, что отбрасывание указанных произведений допустимо и при исследовании движения ракеты. Дело в том, что условие применимости первого метода $\dot{\gamma} \gg \dot{\psi} \sin \vartheta$ соблюдается и при $H = 0$ (в рассмотренном примере равенство нулю кинетического момента $H = J_x\dot{\gamma}$ явилось следствием $J_x = 0$).

Из двух эквивалентных приближенных методов исследования в дальнейшем будет применяться второй метод, отличающийся большей простотой.

Уравнения движения и структурная схема вращающейся ракеты. Как и при рассмотрении невращающейся ракеты, придадим оси x_0 земной системы наклонное к горизонту положение, совместив ее с линией визирования цели в момент t_0 начала исследования. Тогда ϑ представляет собой вариацию угла тангажа, вследствие чего уравнения (7.40) преобразуются к виду:

$$\dot{\psi} = \omega'_y; \tag{7.45а}$$

$$\dot{\vartheta} = \omega'_z; \tag{7.45б}$$

$$0 = \omega'_x. \tag{7.45в}$$

Предполагая, что ракета статически устойчива, а ее кинетический момент $H = J_x(\dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\gamma) = \mathrm{const}$ направлен в сторону носка, согласно обычной методике получаем следующие уравнения движения вращающейся ракеты:

$$J\ddot{\psi} + H\dot{\vartheta} = -Kh_1 - C_1\beta - D\dot{\psi}; \qquad (7.46а)$$

$$m_0 V\dot{\Psi} = C_3\beta; \qquad (7.46б)$$

$$\psi = \Psi + \beta; \qquad (7.46в)$$

$$J\ddot{\vartheta} - H\dot{\psi} = -Kh_2 - C_1\alpha - D\dot{\vartheta}; \qquad (7.46а')$$

$$m_0 V\dot{\theta} = C_3\alpha; \qquad (7.46б')$$

$$\vartheta = \theta + \alpha, \qquad (7.46в')$$

где α и β — соответственно угол атаки и угол скольжения ракеты, характеризующие положение системы Резаля $x'y'z'$ в скоростной системе координат xyz, Ψ и θ — угол поворота и угол наклона траектории (рис. 7.19).

Уравнения не учитывают искажение потока, обтекающего ракету, возможное из-за вращения ракеты.

Уравнения моментов (7.46 а, а') получаем из (7.43), заменяя ω'_y, ω'_z на $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ согласно (7.45) и раскрывая выражения моментов M'_y, M'_z, которые помимо составляющей от рулей содержат в качестве составляющих флюгерный момент и момент аэродинамического демпфирования. Знаки перед членами Kh_1, Kh_2 взяты в соответствии со знаком передаточной функции цепи, связывающей на структурной схеме какого-либо канала, см. рис. 7.12,— сигнал h_1 (h_2) с сигналом на входе звена A. Уравнения боковых сил (7.46 б, б') и кинематические уравнения (7.46 в, в') такие же, как и в гл. I.

Таким образом, уравнения движения (7.46) вращающейся ракеты отличаются от уравнений невращающейся ракеты лишь наличием гироскопических членов $H\dot{\vartheta}$, $H\dot{\psi}$, из-за которых между каналами (7.46 а, б, в) и (7.46 а', б', в') возникает взаимная связь.

Сходство уравнений позволяет из структурной схемы невращающейся ракеты получить структурную схему вращающейся ракеты. С этой целью достаточно внешние моменты M, фигурирующие на структурной схеме невращающейся ракеты (один из ее каналов представлен на рис. 7.2), отождествить с упомянутыми гироскопическими моментами.

Структурная схема вращающейся ракеты показана на рис. 7.20. Параметры этой схемы вычисляются по формулам (1.13), в которых следует C_2 заменить на $K = K_0 K_y K_{\text{РМ}} C_2$ — см. рис. 7.12.

Условие осуществления радиальной коррекции. Составим передаточные функции, связывающие входные сигналы ракеты h_1,h_2 с выходными $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ (см. рис. 7.20). Передаточная функция по контуру равна произведению передаточных функций всех звеньев контура, взятому со знаком минус. Пользуясь правилом, что передаточная функция

замкнутой системы равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс передаточная функция по контуру, получаем в области изображений по Лапласу следующие выражения $\dot\psi$ и $\dot\vartheta$:

$$\hat{\dot\psi}(s)=\frac{W_1W_2}{1-W_2W_3W_4W_5}\hat{h}_1(s)+\frac{W_6W_4W_5W_2}{1-W_2W_3W_4W_5}\hat{h}_2(s)=$$

$$=-\frac{K_1K_2(T_1's+1)(T_1^2s^2+2\zeta_1T_1s+1)}{(T_1^2s^2+2\zeta_1T_1s+1)^2+H^2K_1^2K_3^2(T_3s+1)^2}\hat{h}_1(s)+$$

$$+\frac{HK_1^2K_2K_3(T_1's+1)(T_3s+1)\hat{h}_2(s)}{(T_1^2s^2+2\zeta_1T_1s+1)^2+H^2K_1^2K_3^2(T_3s+1)^2};$$

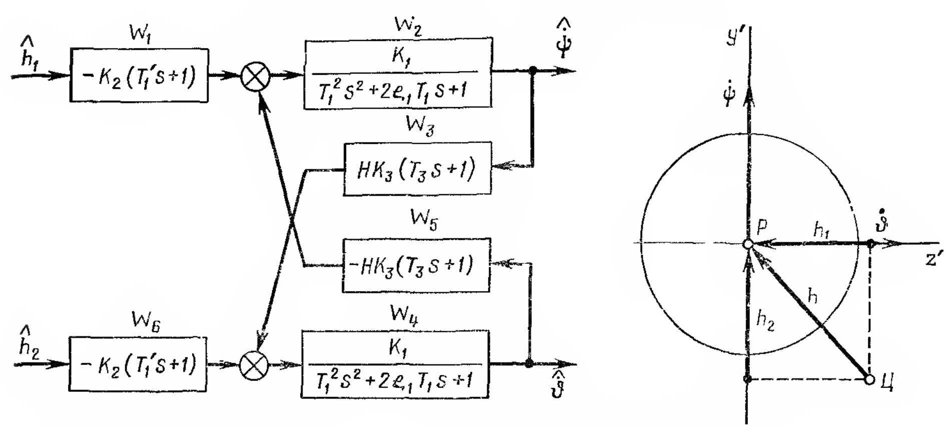


Рис. 7.20. Структурная схема вращающейся ракеты, не учитывающая условие радиальной коррекции

Рис. 7.21. Векторы положительных линейных отклонений и угловых скоростей (при наблюдении со стороны кормовой части)

$$\hat{\dot\vartheta}(s)=\frac{W_6W_4}{1-W_2W_3W_4W_5}\hat{h}_2(s)+\frac{W_1W_2W_3W_4}{1-W_2W_3W_4W_5}\hat{h}_1(s)=$$

$$=-\frac{K_1K_2(T_1's+1)(T_1^2s^2+2\zeta_1T_1s+1)}{(T_1^2s^2+2\zeta_1T_1s+1)^2+H^2K_1^2K_3^2(T_3s+1)^2}\hat{h}_2(s)-$$

$$-\frac{HK_1^2K_2K_3(T_1's+1)(T_3s+1)}{(T_1^2s^2+2\zeta_1T_1s+1)^2+H^2K_1^2K_3^2(T_3s+1)^2}\hat{h}_1(s). \qquad (7.47)$$

Введем в рассмотрение плоскость, перпендикулярную линии визирования ракеты (рис. 7.21), и исследуем направление движения проекции ракеты на эту плоскость, предполагая, что при нулевых начальных условиях мгновенно возникают рассогласования $h_1=\text{const}$, $h_2=\text{const}$. Фигурирующие в (7.47) изображения по Лапласу таких ступенчатых сигналов имеют вид $\hat{h}_1(s)=h_1/s$, $\hat{h}_2(s)=h_2/s$.

Используя (7.47), на основании известной из операционного исчисления теоремы о конечных соотношениях можно для начального момента времени $t=0$ написать

$$\dot\psi(0)=[\hat{\dot\psi}(s)\cdot s]_{s=\infty}=0,\ \dot\vartheta(0)=[\hat{\dot\vartheta}(s)\cdot s]_{s=\infty}=0.$$

Равенство нулю скоростей изменения углов рыскания и тангажа в первый момент $t = 0$ после приложения входных сигналов объясняется инерционностью системы. Найдем для этого момента времени ускорения $\ddot{\psi}(0)$, $\ddot{\vartheta}(0)$. Имея в виду, что при нулевых начальных условиях изображение по Лапласу производной равно произведению оператора s на изображение самой функции, находим

$$\ddot{\psi}(0) = [s\hat{\dot{\psi}}(s) \cdot s]_{s=\infty} = -\frac{K_1 K_2 T_1'}{T_1^2} h_1.$$

$$\ddot{\vartheta}(0) = [s \cdot \hat{\dot{\vartheta}}(s) \cdot s]_{s=\infty} = -\frac{K_1 K_2 T_1'}{T_1^2} h_2.$$

Таким образом, движение по углу рыскания и по углу тангажа начинается в направлениях, предписываемых подаваемыми командами h_1, h_2, т. е. в момент $t = 0$ коррекция радиальная. Однако при $t > 0$ направление движения изменяется и по завершении переходного процесса может сильно отклоняться (что зависит от кинетического момента H) от первоначального.

Найдем направление движения для $t = \infty$. Пользуясь теоремой о конечных соотношениях, имеем:

$$\dot{\psi}(\infty) = [\hat{\dot{\psi}}(s) \cdot s]_{s=0} = -\frac{K_1 K_2}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_1 + \frac{H K_1^2 K_2 K_3}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_2; \quad (7.48а)$$

$$\dot{\vartheta}(\infty) = [\hat{\dot{\vartheta}}(s) \cdot s]_{s=0} = -\frac{K_1 K_2}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_2 - \frac{H K_1^2 K_2 K_3}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_1. \quad (7.48б)$$

Эти выражения показывают, что при $t = \infty$ радиальная коррекция нарушена, потому что скорость изменения угла рыскания зависит не только от сигнала h_1, подаваемого для управления ею, но и от сигнала h_2, предназначаемого для управления скоростью изменения угла тангажа. Аналогичное имеет место и в отношении $\dot{\vartheta}(\infty)$.

Длительность переходного процесса по угловым колебаниям ракеты вокруг ЦТ значительно меньше длительности переходного процесса, относящегося к движению самого ЦТ. Вместе с тем линейное рассогласование h устраняется только в результате движения ЦТ. Отсюда следует, что радиальная коррекция требуется в конце переходного процесса по угловым скоростям $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$.

Чтобы в (7.48 а) ликвидировать составляющую от сигнала h_2, а в (7.48 б) — составляющую от h_1 и тем самым обеспечить радиальную коррекцию, введем угол перекоса $\varkappa$ между осями обмоток статора ВТ и осями вращения рулей (см. рис. 7.16 и рис. 7.22). Тогда вокруг связанных осей y_1, z_1 действуют моменты:

$$M_y = K[h_1 \cos(\gamma + \varkappa) + h_2 \sin(\gamma + \varkappa)];$$

$$M_z = K[-h_1 \sin(\gamma + \varkappa) + h_2 \cos(\gamma + \varkappa)],$$

а вокруг осей Резаля y', z' — моменты:

$$\left.\begin{aligned} M_y' &= M_y \cos\gamma - M_z \sin\gamma = K(h_1 \cos\varkappa + h_2 \sin\varkappa); \\ M_z' &= M_y \sin\gamma + M_z \cos\gamma = K(h_2 \cos\varkappa - h_1 \sin\varkappa). \end{aligned}\right\} \quad (7.49)$$

В формулах (7.48) необходимо заменить h_1, h_2 соответственно на $h_1 \cos\varkappa + h_2 \sin\varkappa$ и $h_2 \cos\varkappa - h_1 \sin\varkappa$. Производя эту замену, находим:

$$\dot{\psi}(\infty) = -\frac{K_1 K_2 \cos\varkappa + HK_1^2 K_2 K_3 \sin\varkappa}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_1 + \frac{HK_1^2 K_2 K_3 \cos\varkappa - K_1 K_2 \sin\varkappa}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_2;$$

$$\dot{\vartheta}(\infty) = -\frac{K_1 K_2 \cos\varkappa + HK_1^2 K_2 K_3 \sin\varkappa}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_2 - \frac{HK_1^2 K_2 K_3 \cos\varkappa - K_1 K_2 \sin\varkappa}{1 + H^2 K_1^2 K_3^2} h_1. \qquad (7.50)$$

В выражениях (7.50) члены, нарушающие радиальную коррекцию, исчезают при соблюдении условия $HK_1^2K_2K_3 \cos\varkappa - K_1K_2 \sin\varkappa = 0$. Из этого условия находим угол перекоса $\varkappa$, обеспечивающий по затухании свободных колебаний вокруг ЦТ радиальную коррекцию ракеты в отношении линии визирования цели:

$$\operatorname{tg}\varkappa = HK_1K_3, \qquad (7.51)$$

где K_1 и K_3 определяются формулами (1.13).

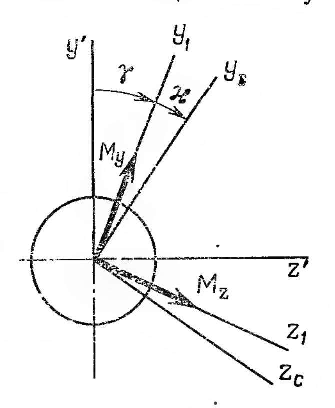


Рис. 7.22. Связанные оси y_1, z_1, оси Резаля y', z' и оси y_c, z_c, совпадающие с осями обмоток статора (при наблюдении со стороны кормовой части)

Как показывает (7.51) и рис. 7.22, оси y_c, z_c обмоток статора ВТ должны быть повернуты относительно связанных осей y_1, z_1 (они параллельны осям вращения рулей) в направлении собственного вращения ракеты вокруг продольной оси.

Приближенное исследование двухканальной системы управления. Пусть вращающаяся ракета наводится на цель по лучу, так что в обмотки роторов СКВТ поступают сигналы, пропорциональные линейным рассогласованиям h_1, h_2 (см. рис. 7.16). Предположим также, что на вращающейся ракете установлены ДУСы, способные измерять угловые скорости $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$. Эти ДУСы можно представить себе связанными с наружным кольцом гироскопа крена. Выходные сигналы ДУСов после усиления также подаются в обмотки роторов СКВТ, что приводит к возникновению вокруг ракеты отрицательной обратной связи по угловой скорости. Оси обмоток статоров СКВТ будем считать перекошенными на угол $\varkappa$ по отношению к осям рулей (см. рис. 7.22).

Сначала, как это и делалось до сих пор, будем предполагать цепь, связывающую суммарные напряжения u_y, u_z на роторах СКВТ с моментами M_y, M_z вокруг связанных осей, безынерционной с коэффициентом усиления $K = K_y K_{\text{рм}} C_2$. В этом случае моменты, развиваемые рулями вокруг осей Резаля y', z', определяются выражениями

$M'_y = K(u_y \cos\varkappa + u_z \sin\varkappa)$, $M'_z = K(u_z \cos\varkappa - u_y \sin\varkappa)$, аналогичными (7.49).

Контур наведения вращающейся ракеты не отличается от контура наведения невращающейся ракеты. Поэтому при учете рис. 7.12, 7.20 и изложенного выше, легко получить структурную схему «двухканальная система управления — вращающаяся ракета» (рис. 7.23).

Структурная схема состоит из двух одинаковых каналов, связанных между собой перекрестными связями. Существуют методы, специально разработанные для исследования такого рода симметричных схем. Широкую известность получил метод комплексных координат и комплексных передаточных функций. Он предусматривает замену двух «симметричных» координат, например, координат $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$, — см. рис. 7.20 — одной комплексной координатой $x = \dot{\psi} + j\dot{\vartheta}$.

Привлекательная сторона такого подхода состоит в том, что в отношении комплексных координат двухканальная система описывается системой дифференциальных уравнений, порядок которой в два раза меньше, чем порядок исходной системы с действительными координатами. Недостаток заключается в необходимости иметь дело с дифференциальными уравнениями и передаточными функциями, коэффициенты которых — комплексные величины, что существенно осложняет анализ. Можно, однако, достаточно просто двухканальные системы исследовать и обычными методами. Упрощения, которые можно ожидать вследствие симметрии схемы, проявляются при этом не в меньшей мере.

Из обычных методов исследования применительно к двухканальным системам наиболее эффективны метод логарифмического корневого годографа и, в несколько меньшей степени, — обычный метод логарифмических частотных характеристик. Чтобы исследовать данными методами устойчивость системы, необходимо сначала структурную схему привести к виду, когда она не содержит перекрещивающихся связей. Для схемы, изображенной на рис. 7.23, этого можно, например, достигнуть следующими операциями:

1. Путем эквивалентных преобразований приводим структурную схему к виду, когда она вместо двух содержит только одну пару перекрестных связей. С этой целью после объединения обратных связей *a*, *b* точку съема *1* перекрестной связи $\sin\varkappa$ переносим в направлении, противоположном распространению сигнала, в точку $\dot{\vartheta}$, а точку суммирования *1'* — в направлении распространения сигнала на выход звена *B*. Аналогично поступаем с перекрестной связью ($-\sin\varkappa$). Полученные таким образом перекрестные связи соединены параллельно с перекрестными связями $-HK_3(T_3s+1)$, $HK_3(T_3s+1)$, что позволяет эти связи объединить в одну перекрестную связь.

2. Поворотом нижней части схемы на 180° (вращение перпендикулярно плоскости чертежа) устраняем перекрещивание связей и приводим всю схему к обычной многоконтурной системе (рис. 7.24). Главный контур состоит из двух одинаковых звеньев в виде замкнутых контуров *I*, *I'* (они представляют каналы рыскания и тангажа невращающейся ракеты), связанных между собой звеньями *II*, *II'*, передаточные функции которых отличаются только знаком. В главном контуре осу-

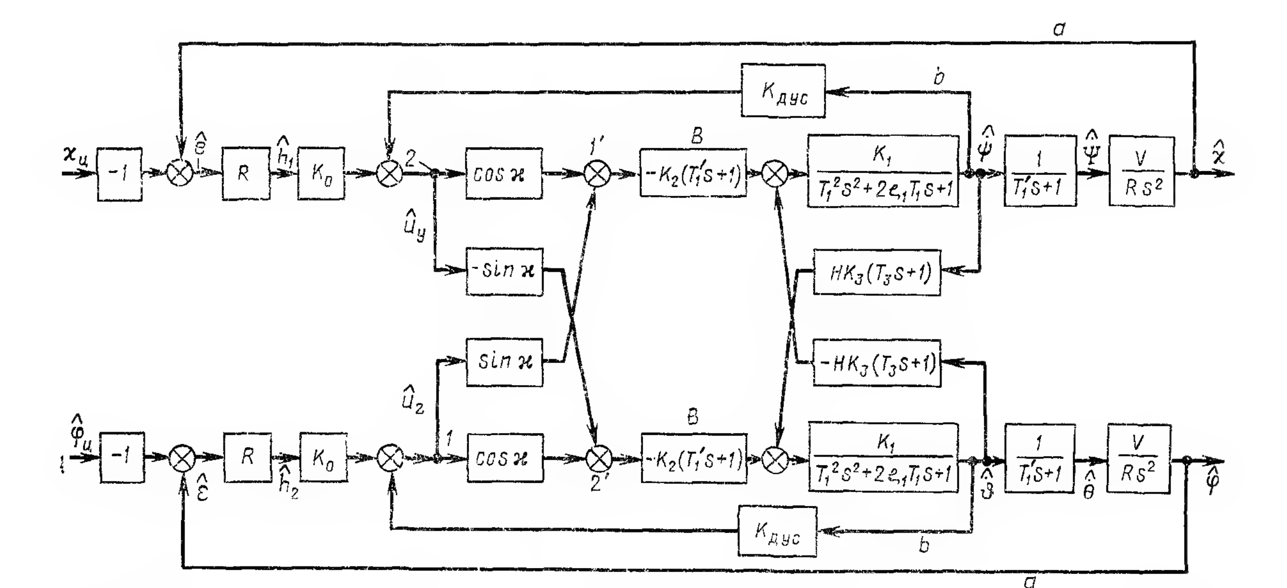


Рис. 7.23. Двухканальная система управления вращающейся ракеты при отсутствии запаздываний в усилительных цепях

ществляется отрицательная обратная связь. При отсутствии вращения ракеты ($H = 0$, $\operatorname{tg} \varkappa = K_1 K_3 H = 0$) звенья связи II, II' исчезают и, как это и должно быть, контур распадается на два независимых канала, характерных для невращающейся ракеты.

Исследование схемы, представленной на рис. 7.24, можно выполнить, используя следующий порядок действий:

1. Выбираются (см. § 7.1) при помощи метода ЛКГ параметры настройки $K_{\text{ДУС}}$, K_2 контуров I, I', соответствующих невращающейся ракете. Эти контуры заменяются эквивалентными звеньями. Посколь-

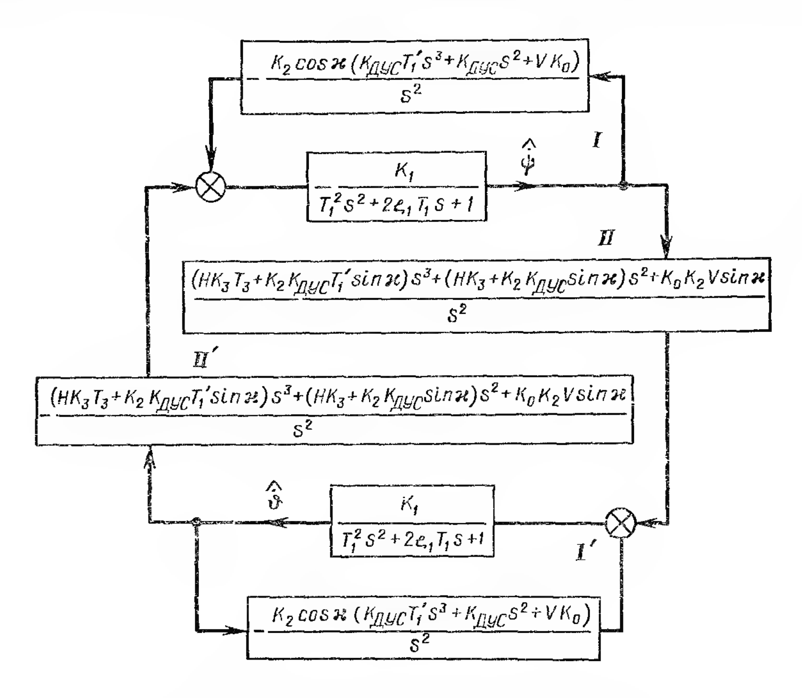


Рис. 7.24. Структурная схема, эквивалентная схеме, изображенной на рис. 7.23

ку корни контуров I, I' известны из ЛКГ, передаточные функции эквивалентных звеньев легко представить в виде произведения элементарных множителей.

2. Строится ЛКГ главного контура. Представляет интерес порознь исследовать влияние на устойчивость главного контура, т. е. на устойчивость всей системы в целом, кинетического момента H ракеты и угла перекоса $\varkappa$. С этой целью сначала полагаем $\varkappa = 0$ и строим ЛКГ, принимая H^2 в качестве изменяемого параметра. Выбрав некоторое значение H, строим затем ЛКГ главного контура, в котором роль изменяемого параметра играет $\sin \varkappa$. При изменении $\varkappa$ следует учитывать, что от этого параметра зависят также корни контуров I, I' (о выборе $\varkappa$ см. § 7.3).

Принципиальный недостаток рассмотренного исследования, в равной мере свойственный исследованию при помощи метода комплексных координат и комплексных передаточных функций, заключается в том, что эти исследования не позволяют точно учесть влияние запаздывания в рулевом тракте, т. е. в тракте, имеющем в качестве входного сигнала напряжение с СКВТ, а в качестве выходного — момент, развиваемый вокруг ЦТ ракеты рулем.

Пусть, например, $\frac{K}{(T_p s+1)}$ — передаточная функция тракта, соответствующего рулю *1*. Согласно рис. 7.16, на вход этого тракта поступает сигнал $u_1 = K^* (h_1 (t) \cos \omega t + h_2 (t) \sin \omega t)$, представляющий собой произведения неизвестных функций времени $h_1 (t)$, $h_2 (t)$ на $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ (амплитудно-модулированный сигнал на несущей частоте ω). В этом случае упомянутые методы не дают возможности найти точное выражение выходного сигнала тракта. Приходится прибегать к аппроксимациям, например, трактовать как постоянные величины сигналы $h_1 (t)$ и $h_2 (t)$, являющиеся координатами замкнутого контура наведения.

От этой существенной неточности свободен метод исследования, излагаемый в следующем параграфе.

§ 7.3. ТОЧНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ РАКЕТ С ДВУХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрение работы двухканальной системы управления вращающейся ракеты показывает (см. рис. 7.16), что наряду с плавно изменяющимися переменными $\dot{\psi}, \dot{\Psi}, h_1$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\theta}$, h_2 (характерными для контура наведения и корпуса ракеты), имеются амплитудно-модулированные сигналы, относящиеся к бортовой аппаратуре (напряжение, снимаемое с СКВТ, моменты, развиваемые рулями вокруг связанных осей и др.). Поскольку, в конечном счете, интерес представляют указанные выше плавные переменные, целесообразно иметь в распоряжении метод исследования, который позволил бы описать систему в целом уравнениями только в отношении этих переменных. Такой метод исследования рассматривается ниже.

Общая теория. Рассмотрим ракету с двумя независимо функционирующими каналами во взаимно перпендикулярных продольных плоскостях. Независимое функционирование понимается в том смысле, что переменные, характерные для одной плоскости управления, не входят в дифференциальные уравнения канала, относящегося к другой плоскости. Будем предполагать, что вход p_i и выход q_i каналов, вращающихся вместе с ракетой, связаны линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$q_i = W_i (D) p_i; \quad i = 1, 2, \tag{7.52}$$

где

$$W_i(D) = \frac{B_i(D)}{A_i(D)} = K_i \frac{1 + \sum_{k=1}^{m_i} b_{ik} D^k}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \tau_{ik} D^k}, \; n_i > m_i; \qquad (7.53)$$

$D = d/dt$ — оператор, умножение на который переменной означает дифференцирование по времени этой переменной. Структурная схема соответствующей системы — на рис. 7.25. Примером такой системы может служить сочетание двух рулевых трактов, оканчивающихся рулями *1*, *2* со взаимно перпендикулярными осями вращения (см. рис. 7.16). Под сигналами p_1, p_2 следует подразумевать в этом случае суммарные напряжения u_1, u_2, поступающие на вход усилителей рулевых машинок со статорных обмоток СКВТ, а под сигналами q_1, q_2 — моменты M_y, M_z, развиваемые рулями *1*, *2* вокруг связанных осей ракеты y_1, z_1. Передаточные функции $W_1(D)$, $W_2(D)$ характеризуют свойства рулевой машинки, усилителя и корректирующего контура, если он имеется. Корректирующий контур включается в схему упомянутого усилителя.

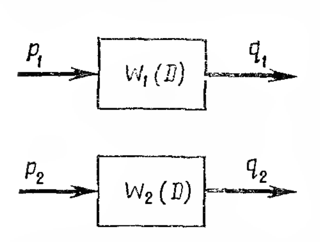


Рис. 7.25. Структурная схема двухканальной системы во вращающейся системе координат

Два скалярных уравнения (7.52) запишем в матричной форме

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{W}(D)\,\mathbf{P}^*, \qquad (7.54)$$

где

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W}(D) = \begin{bmatrix} W_1(D) & 0 \\ 0 & W_2(D) \end{bmatrix}.$$

Звездочка* здесь означает, что элементы отмеченных ею векторов (матриц-столбцов) представляют собой координаты в связанной с ракетой системе.

Предположим теперь, что ракета вращается вокруг продольной оси с угловой скоростью $\dot{\gamma}$. Угловая скорость крена $\dot{\gamma}$ предполагается явной или неявной функцией времени.

Введем в рассмотрение «матрицу вращения»

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \qquad (7.55)$$

В результате умножения «постоянного» вектора на эту матрицу получается некоторый вектор, элементы которого представляются амплитудно-модулированными сигналами с несущей частотой $\dot{\gamma}$. В дальнейшем этот вектор будет называться вращающимся и отмечаться звездочкой, тогда как исходный «постоянный» вектор, называе-

мый невращающимся, будет обозначаться той же буквой, но без звездочки. Если, например, вектор $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$, элементами которого служат линейные рассогласования системы теленаведения (невращающийся вектор), умножить на матрицу $\mathbf{\Phi}(t)$, то получим вращающийся вектор

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} h_1(t)\cos\gamma + h_2(t)\sin\gamma \\ -h_1(t)\sin\gamma + h_2(t)\cos\gamma \end{bmatrix}, \tag{7.56}$$

составляющие которого с точностью до постоянного множителя соответствуют ранее найденным синусоидальным моментам вокруг связанных осей ракеты, — см. (7.34).

Легко видеть, что матрица вращения обладает следующими свойствами (как и раньше, штрихом отмечается транспонированная матрица):

$$\det\mathbf{\Phi}(t) = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1; \tag{7.57а}$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}'; \tag{7.57б}$$

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \dot{\gamma}(t)\begin{bmatrix} -\sin\gamma(t) & \cos\gamma(t) \\ -\cos\gamma(t) & -\sin\gamma(t) \end{bmatrix} = \dot{\gamma}(t)\,\mathbf{\Omega}(t); \tag{7.57в}$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}}(t) = \dot{\gamma}(t)\begin{bmatrix} -\cos\gamma(t) & -\sin\gamma(t) \\ \sin\gamma(t) & -\cos\gamma(t) \end{bmatrix} = -\dot{\gamma}(t)\,\mathbf{\Phi}(t); \tag{7.57г}$$

$$\det\mathbf{\Omega} = 1; \tag{7.57д}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{\Omega}'; \tag{7.57е}$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}\dot{\mathbf{\Phi}} = \dot{\gamma}\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Omega} = -\dot{\gamma}\mathbf{\Omega}'\,\mathbf{\Phi} = \dot{\gamma}\mathbf{J}; \tag{7.57ж}$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.58}$$

Обратный переход, т. е. получение невращающегося вектора из некоторого вращающегося, осуществляем умножением вращающегося вектора на обратную матрицу вращения $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$. Например, умножая вектор (7.56) на матрицу $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$, получим

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\,\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1\cos\gamma + h_2\sin\gamma \\ -h_1\sin\gamma + h_2\cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H},$$

т. е. приходим к выражениям, совпадающим с точностью до постоянного множителя с ранее полученными выражениями моментов вокруг невращающихся осей, — см. (7.42). Таким образом, обратный переход соответствует процессу демодуляции.

Если между осями обмоток статора СКВТ и осями вращения рулей имеется угол перекоса $\varkappa$ (см. рис. 7.22), то модуляция осуществляется посредством матрицы

$$\Phi_\varkappa(t)=\begin{bmatrix}\cos(\gamma+\varkappa) & \sin(\gamma+\varkappa)\\ -\sin(\gamma+\varkappa) & \cos(\gamma+\varkappa)\end{bmatrix}=\cos\varkappa\Phi(t)+\sin\varkappa\,\Omega(t), \quad (7.59)$$

а демодуляция — посредством прежней матрицы $\Phi^{-1}(t)$.

Повторим для примера преобразования сигналов, выполненные для этого случая в § 7.2, другим способом.

Модуляция:

$$\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}^*=\Phi_\varkappa(t)\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}=\{\cos\varkappa\,\Phi(t)+\sin\varkappa\,\Omega\ (t)\}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}. \quad (7.60а)$$

Демодуляция [при вычислении второго члена в фигурных скобках использованы правила (7.57 е, ж) и (7.58)]

$$\Phi^{-1}(t)\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}^*=\{\cos\varkappa\,\Phi^{-1}(t)\,\Phi(t)+\sin\varkappa\,\Phi^{-1}(t)\,\Omega\ (t)\}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}=$$

$$=\{\cos\varkappa\cdot\mathbf{I}+\sin\varkappa\cdot\mathbf{J}\}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varkappa & \sin\varkappa\\ -\sin\varkappa & \cos\varkappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}. \quad (7.60б)$$

Результат демодуляции, как и должно быть, совпадает с точностью до постоянного множителя с ранее найденным результатом (7.49).

Пусть **P** и **Q** векторы, относящиеся к невращающимся осям y', z'. Это означает, что $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}p_y\\ p_z\end{bmatrix}$; $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}q_y\\ q_z\end{bmatrix}$, где p_y, p_z и q_y, q_z — переменные в невращающихся осях (например, моменты M'_y, M'_z, действующие на ракету вокруг осей Резаля y', z'). Имея в виду общий случай $\varkappa\neq 0$, можно написать следующие соотношения между вращающимися $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{Q}^*$ и невращающимися **P**, **Q** векторами:

$$\mathbf{P}^*=\Phi_\varkappa\mathbf{P}; \quad (7.61а)$$

$$\mathbf{Q}=\Phi^{-1}\mathbf{Q}^*. \quad (7.61б)$$

Подставив в (7.61 б) выражение (7.54), а затем выражение (7.61 а), получим следующую связь между невращающимися векторами:

$$\mathbf{Q}=\{\Phi^{-1}\,\mathbf{W}(D)\,\Phi_\varkappa\}\,\mathbf{P}=\mathbf{W}_\Phi(D)\,\mathbf{P}. \quad (7.62)$$

Графически эта связь иллюстрируется на рис. 7.26.

Для дальнейшего уравнения (7.62) имеет основополагающее значение. Входящая в него передаточная функция $\mathbf{W}_\Phi(D)$ связывает невращающиеся векторы на входе и выходе вращающейся двухканальной системы и будет называться матричной передаточной функцией вращения (МПФВ).

А. М. Ляпуновым доказано, что линейные системы с периодическими коэффициентами являются приводимыми, т. е. преобразованием переменных приводятся к линейным системам с постоянными коэффи-

циентами. К сожалению, для общего случая алгоритм такого преобразования неизвестен. Для рассматриваемого случая (вращающаяся ракета) матрица $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$, по существу, осуществляет указанное преобразование А. М. Ляпунова, так как переводит линейную систему с периодическими коэффициентами (7.60а) в линейную систему с постоянными коэффициентами (7.60 б).

Обратимся теперь к нахождению МПФВ. Предположим для простоты, что каналы системы одинаковы:

$$W_1(D) = W_2(D) = W(D). \tag{7.63}$$

Тогда

$$\mathbf{W}(D) = W(D)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{B(D)}{A(D)}\mathbf{I}. \tag{7.64}$$

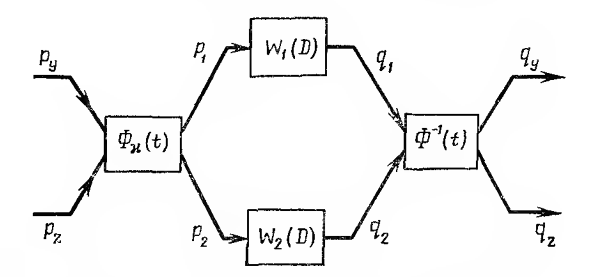


Рис. 7.26. Структурная схема двухканальной системы в невращающейся системе координат

Подставив (7.61) в (7.54) и заменив в полученном уравнении $\mathbf{W}(D)$ выражением (7.64), получим следующее соотношение:

$$A(D)\{\mathbf{\Phi Q}\} = B(D)\{\mathbf{\Phi}_\varkappa \mathbf{P}\}. \tag{7.65}$$

Обе части уравнения (7.65) соответствуют приложению линейного дифференциального оператора к вектору, представляющему собой произведение двух изменяющихся во времени матриц.

Обобщим только что указанную операцию, введя специальный «дифференциальный оператор вращения» $\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}(D)$. Он соответствует операции приложения линейного дифференциального оператора j-го порядка

$$L_j(D) = 1 + l_1 D + \ldots + l_j D^j$$

к произведению некоторого двухмерного вектора $\mathbf{f}(t)$ и матрицы вращения

$$L(D)\{\mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{f}(t)\} = \mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}(D)\{\mathbf{f}(t)\}. \tag{7.66}$$

При учете (7.59) аналогичным образом определяем и дифференциальный оператор вращения

$$\mathbf{L}_{\Phi\varkappa}^{(j)}(D)\{\mathbf{f}(t)\} = L(D)\{\mathbf{\Phi}_\varkappa(t)\,\mathbf{f}(t)\} = \cos\varkappa L(D)\{\mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{f}(t)\} +$$
$$+ \sin\varkappa L(D)\{\mathbf{\Omega}(t)\,\mathbf{f}(t)\} = \cos\varkappa \mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}(D)\{\mathbf{f}(t)\} + \sin\varkappa \mathbf{L}_{\Omega}^{(j)}(D)\{\mathbf{f}(t)\}. \tag{7.67}$$

Используя введенные дифференциальные операторы, можно уравнение (7.65) переписать в виде:

$$\mathbf{A}_{\Phi}^{(n)}(D)\{\mathbf{Q}(t)\} = \cos\varkappa \mathbf{B}_{\Phi}^{(m)}(D)\{\mathbf{P}(t)\} + \sin\varkappa \mathbf{B}_{\Omega}^{(m)}\{\mathbf{P}(t)\}. \qquad (7.68)$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Q}(t) = \cos\varkappa\left\{\left[\mathbf{A}_{\Phi}^{(n)}(D)\right]^{-1}\mathbf{B}_{\Phi}^{(m)}(D)\right\}\mathbf{P}(t) + \sin\varkappa\left\{\left[\mathbf{A}_{\Phi}^{(n)}(D)\right]^{-1}\mathbf{B}_{\Omega}^{(m)}(D)\right\}\mathbf{P}(t). \qquad (7.69)$$

Сравнивая (7.62) и (7.69), получаем следующее выражение МПФВ:

$$\mathbf{W}_{\Phi}(D) = \cos\varkappa\left[\mathbf{A}_{\Phi}^{(n)}(D)\right]^{-1}\mathbf{B}_{\Phi}^{(m)}(D) + \sin\varkappa\left[\mathbf{A}_{\Phi}^{(n)}(D)\right]^{-1}\mathbf{B}_{\Omega}^{(m)}(D). \qquad (7.70)$$

Определение оператора $\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}(D)$ — довольно трудоемкая, но всегда выполнимая задача. Вычислим этот оператор для наиболее простого случая, когда $\dot{\gamma} = \omega = \text{const}$, т. е. когда ракета вращается с постоянной скоростью*. Непосредственно вычисляя производную произведения и используя свойства (7.57 в, г), находим

$$\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}(D)\{f(t)\} = (1 + l_1 D + \ldots + l_j D^j)\{\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{f}(t)\} =$$
$$= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{f}(t) + l_1[\omega\mathbf{\Omega}(t)\mathbf{f}(t) + \mathbf{\Phi}(t)D\mathbf{f}(t)] + l_2[-\omega^2\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{f}(t) +$$
$$+ \omega\mathbf{\Omega}(t)D\mathbf{f}(t) + \omega\mathbf{\Omega}(t)D\mathbf{f}(t) + \mathbf{\Phi}(t)D^2\mathbf{f}(t)] + \ldots =$$
$$= \{\mathbf{\Phi}(t)(1 - l_2\omega^2 + l_1 D + l_2 D^2 + \ldots) + \mathbf{\Omega}(t)(l_1\omega + 2l_2\omega D + \ldots)\}\mathbf{f}(t) =$$
$$= \{\mathbf{\Phi}(t)M_j(D) + \mathbf{\Omega}(t)N_j(D)\}\mathbf{f}(t). \qquad (7.71)$$

Следовательно, дифференциальный оператор вращения определяется формулой

$$\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}(D) = \mathbf{\Phi}(t)M_j(D) + \mathbf{\Omega}(t)N_j(D), \qquad (7.72)$$

где полиномы $M_j(D)$ и $N_j(D)$ берутся из (7.71).

Кроме оператора этого вида в выражение (7.70) МПФВ входит дифференциальный оператор вращения $\mathbf{B}_{\Omega}^{(m)}(D)$ и обратный дифференциальный оператор вращения $[\mathbf{A}_{\Phi}^{(n)}(D)]^{-1}$.

Аналогично оператору $\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}(D)$, можно найти оператор

$$\mathbf{L}_{\Omega}^{(j)}(D) = \mathbf{\Omega}(t)M_j(D) - \mathbf{\Phi}(t)N_j(D), \qquad (7.73)$$

где операторы $M_j(D)$, $N_j(D)$ определяются прежними выражениями, т. е.

$$\left.\begin{aligned} M_j(D) &= 1 - l_2\omega^2 + l_1 D + l_2 D^2 + \ldots; \\ N_j(D) &= l_1\omega + 2l_2\omega D + \ldots . \end{aligned}\right\} \qquad (7.74)$$

---

* Оператор $\mathbf{L}_{\Phi}^{j}(D)$ можно вычислить и в случае $\dot{\gamma} = \text{var}$. Здесь, однако, принимаем обычное для вращающихся ракет условие $\dot{\gamma} = \text{const}$.

Что касается обратного дифференциального оператора вращения $[\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}]^{-1}$, то он имеет вид

$$[\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}]^{-1} = \frac{M_j}{M_j^2+N_j^2}\,\mathbf{\Phi}' + \frac{N_j}{M_j^2+N_j^2}\,\mathbf{\Omega}'. \tag{7.75}$$

В этом можно убедиться, проверив соотношение $[\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}]^{-1}[\mathbf{L}_{\Phi}^{(j)}] = \mathbf{I}$

Подставляя теперь в (7.70) вместо $\mathbf{B}_{\Phi}^{(m)}(D)$, $\mathbf{B}_{\Omega}^{(m)}(D)$, $[\mathbf{A}_{\Phi}^{(n)}(D)]^{-1}$ соответственно операторы вида (7.72), (7.73) и (7.75), получим следующее выражение МПФВ:

$$\mathbf{W}_{\Phi}(D) = \frac{\cos\varkappa}{M_n^2+N_n^2}(M_n\mathbf{\Phi}'+N_n\mathbf{\Omega}')(\mathbf{\Phi}M_m+\mathbf{\Omega}N_m)+$$

$$+\frac{\sin\varkappa}{M_n^2+N_n^2}(M_n\mathbf{\Phi}'+N_n\mathbf{\Omega}')(\mathbf{\Omega}M_m-\mathbf{\Phi}N_m). \tag{7.76}$$

Производя при учете правил (7.57 е, ж) и (7.58) перемножение в правой части, получим окончательное выражение МПФВ:

$$\mathbf{W}_{\Phi}(D) = \cos\varkappa\begin{bmatrix} w_1(D) & w_2(D) \\ -w_2(D) & w_1(D)\end{bmatrix} + \sin\varkappa\begin{bmatrix} -w_2(D) & w_1(D) \\ -w_1(D) & -w_2(D)\end{bmatrix}. \tag{7.77}$$

В этом выражении

$$\left.\begin{aligned} w_1(D) &= \frac{M_n(D)\,M_m(D)+N_n(D)\,N_m(D)}{M_n^2(D)+N_n^2(D)}; \\ w_2(D) &= \frac{M_n(D)\,N_m(D)-M_m(D)\,N_n(D)}{M_n^2(D)+N_n^2(D)}, \end{aligned}\right\} \tag{7.78}$$

где согласно (7.74) и (7.53)

$$\left.\begin{aligned} M_n(D) &= 1-\tau_2\omega^2+\tau_1 D+\tau_2 D^2+\ldots; \\ M_m(D) &= K(1-b_2\omega^2+b_1 D+b_2 D^2+\ldots); \\ N_n(D) &= \tau_1\omega+2\tau_2\omega D+\ldots; \\ N_m(D) &= K(b_1\omega+2b_2\omega D+\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{7.79}$$

Таким образом, минуя рассмотрение сигналов на несущей частоте, можно по формулам (7.77) ÷ (7.79) сразу исследовать связь между модулирующими «постоянными» сигналами на входе и выходе обоих каналов вращающейся ракеты, работающих на несущей частоте ω.

Структурная схема двухканальной вращающейся ракеты при учете инерционности рулевых трактов. Будем считать, что рулевые тракты, вращающиеся вместе с ракетой, одинаковы и описываются дифференциальными уравнениями первого порядка

$$T_p\dot{M}_y + M_y = Ku_1, \qquad T_p\dot{M}_z + M_z = Ku_2, \tag{7.80}$$

где M_y, M_z — моменты, развиваемые рулями вокруг связанных осей ракеты y_1, z_1; u_1, u_2 — суммарные напряжения, поступающие от СКВТ на вход усилителей рулевых трактов.

Отождествляя переменные u_1, u_2 с p_1, p_2, а переменные M_y, M_z — с q_1, q_2, получаем согласно (7.52)

$$W(D) = \frac{K}{1+T_p D}. \qquad (7.81)$$

Отождествив составляющие p_y, p_z входного невращающегося вектора **P** с напряжениями u_y, u_z на обмотках роторов СКВТ$_1$ и СКВТ$_2$, а составляющие q_y, q_z невращающегося выходного вектора **Q** — с моментами M'_y, M'_z, развиваемыми рулями вокруг невращающихся осей ракеты y', z', легко получим согласно формулам (7.77) ÷ (7.79) выражение МПФВ рулевых трактов. Именно, из сравнения (7.53) и (7.80) находим

$$\tau_1 = T_p, \ \tau_2 = \tau_3 = \ldots = 0, \ b_1 = b_2 = \ldots = 0.$$

После подстановки этих значений в уравнения (7.79) ÷ (7.77) получаем выражение МПФВ рулевых трактов

$$\mathbf{W}_\Phi(D) = \frac{K\cos\varkappa}{(1+T_p D)^2 + (T_p\omega)^2}\begin{bmatrix} 1+T_p D & -T_p\omega \\ T_p\omega & 1+T_p D\end{bmatrix} + \frac{K\sin\varkappa}{(1+T_p D)^2+(T_p\omega)^2}\begin{bmatrix} T_p\omega & 1+T_p D \\ -(1+T_p D) & T_p\omega\end{bmatrix}. \qquad (7.82)$$

Из этого выражения вытекают следующие дифференциальные уравнения рулевых трактов в невращающейся системе координат:

$$T_p^2\ddot{M}'_y + 2T_p\dot{M}'_y + (1+\omega^2T_p^2)M'_y = K[T_p\cos\varkappa\,\dot{u}_y + (\cos\varkappa + T_p\omega\sin\varkappa)u_y + T_p\sin\varkappa\,\dot{u}_z + (\sin\varkappa - T_p\omega\cos\varkappa)u_z];$$

$$T_p^2\ddot{M}'_z + 2T_p\dot{M}'_z + (1+\omega^2T_p^2)M'_z = K[T_p\cos\varkappa\,\dot{u}_z + (\cos\varkappa + T_p\omega\sin\varkappa)u_z - T_p\sin\varkappa\,\dot{u}_y - (\sin\varkappa - T_p\omega\cos\varkappa)u_y]. \qquad (7.83)$$

Интересно отметить, что изолированным вращающимся каналам, описываемым дифференциальными уравнениями первого порядка (7.80), соответствуют в невращающейся системе координат взаимосвязанные каналы, каждый из которых описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Взаимная связь каналов не исчезает даже при отсутствии угла перекоса ($\varkappa = 0$). При безынерционном рулевом тракте ($T_p = 0$) уравнения (7.83), как это и должно быть, сводятся к ранее полученным уравнениям (7.49).

Если бы вращающаяся ракета имела пренебрежимо малый кинетический момент ($H = 0$), то из-за запаздывания в рулевых трактах между каналами управления все равно возникала бы взаимная связь. Правда, как это видно из уравнений (7.83), в установившемся режиме эту связь можно ликвидировать выбором угла перекоса $\varkappa = \operatorname{arctg} T_p\omega$. Однако введение угла перекоса обусловливает взаимосвязь между каналами в переходном процессе (члены $T_p\sin\varkappa\dot{u}_z$ и $-T_p\sin\varkappa\dot{u}_y$).

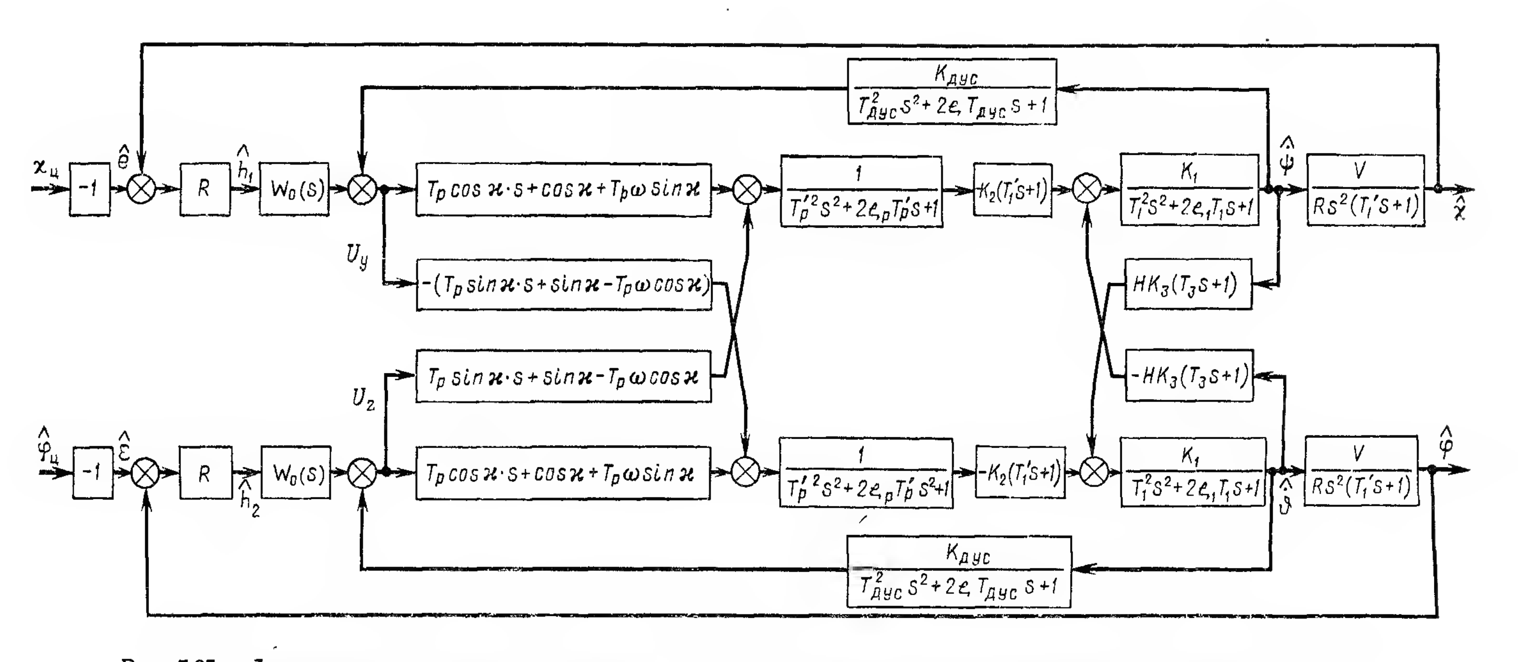


Рис. 7.27. Двухканальная система управления вращающейся ракеты при учете запаздываний в рулевых трактах и усилительных цепях

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда $H \neq 0$, $\varkappa \neq 0$, $T_р \neq 0$, а тракт, связывающий линейное рассогласование $h_1 (h_2)$ с напряжением, поступающим в обмотку ротора СКВТ, представляется не усилительным звеном K_0, а звеном $W_0(s)$ [$W_0(s)$ — передаточная функция, например, человека-оператора]. Структурную схему всей системы теленаведения для этого случая можно получить из схемы на рис. 7.23 и уравнений (7.83). Выражения моментов, полученные из этих уравнений, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} M'_y = &\left[K'/(T'^2_р s^2 + 2\zeta_р T'_р s + 1)\right] \left[(T_р \cos\varkappa \cdot s + \cos\varkappa + T_р \omega \sin\varkappa) u_y + \right.\\ &\left. + (T_р \sin\varkappa \cdot s + \sin\varkappa - T_р \omega \cos\varkappa) u_z\right]; \\ M'_z = &\left[K'/(T'^2_р s^2 + 2\zeta_р T'_р s + 1)\right] \left[(T_р \cos\varkappa \cdot s + \cos\varkappa + T_р \omega \sin\varkappa) u_z - \right.\\ &\left. - (T_р \sin\varkappa \cdot s + \sin\varkappa - T_р \omega \cos\varkappa) u_y\right], \end{aligned}\right\} \tag{7.84}$$

где

$$K' = K/(1 + \omega^2 T_р^2); \quad T'_р = T_р/\sqrt{1 + \omega^2 T_р^2}; \quad \zeta_р = 1/\sqrt{1 + \omega^2 T_р^2}. \tag{7.85}$$

Вводя эти моменты в структурную схему на рис. 7.23, получим искомую структурную схему реальной системы управления (рис. 7.27). В этой структурной схеме коэффициент K_2 по-прежнему определяется формулой (1.13), но при замене в ней C_2 на $C_2 K/(1 + \omega^2 T_р^2)$, где K — коэффициент усиления вращающегося рулевого тракта.

Устойчивость и качество двухканальной системы, представленной на рис. 7.27, могут быть исследованы при последовательности операций, которая описана в § 7.2 при рассмотрении схемы, изображенной на рис. 7.23. При этом особое внимание следует уделить определению угла перекоса $\varkappa$, при котором быстрота затухания свободных колебаний системы наибольшая.

Наибольшая быстрота затухания получается при радиальной коррекции ракеты, так как затухающее спиральное движение ракеты вокруг линии визирования цели, имеющее место при отсутствии радиальной коррекции, вряд ли закончится быстрее, чем движение ракеты к линии визирования по кратчайшему пути. Поэтому, обеспечивая выбором $\varkappa$ максимальную быстроту затухания, обеспечиваем, по-видимому, радиальную коррекцию, а радиальная коррекция существенно облегчает работу человека-оператора в контуре наведения.

§ 7.4. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РАКЕТЫ

Управляющие моменты, предназначенные для изменения угла рыскания и угла тангажа вращающейся ракеты, могут быть созданы при использовании одного руля вместо двух. Предположим, что на ракете имеется руль *1*, управляемый по той же схеме, что и показанная на рис. 7.16. Руль *1* создает момент M_y только вокруг одной связан-

ной оси ракеты y_1 (одноканальное управление), причем согласно рис. 7.16 этот момент

$$M_y = K\,(u_y \cos\ \omega t + u_z \sin \omega t), \tag{7.86}$$

где $\omega = \text{const}$ — скорость вращения ракеты вокруг продольной оси; u_y, u_z напряжения, связанные с линейными рассогласованиями между ракетой и линией визирования цели соотношениями (считаем, что ДУС отсутствует)

$$\hat{u}_y = W_0(s)\,\hat{h}_1,\ \hat{u}_z = W_0(s)\,\hat{h}_2. \tag{7.87}$$

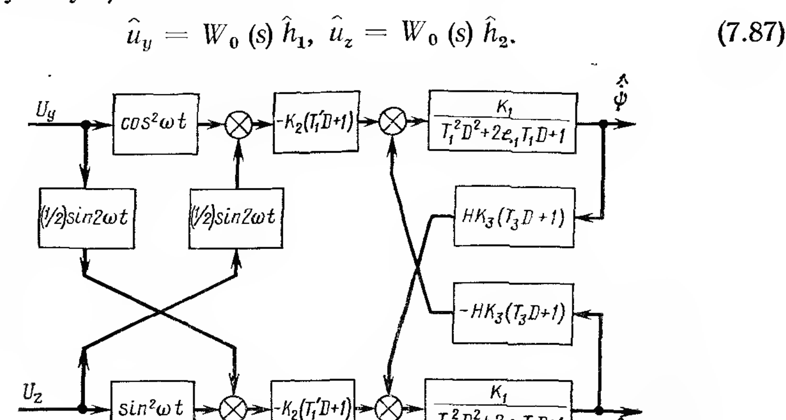


Рис. 7.28. Структурная схема вращающейся ракеты с одним управляющим органом

Преимущество одноканальной системы управления — в экономии аппаратуры (один рулевой тракт вместо двух). Однако, как будет показано ниже, создание удовлетворительно работающей одноканальной системы управления встречает значительные трудности.

Уравнения и структурная схема. Моменты, развиваемые рулем *1* вокруг невращающихся осей y', z' ракеты (осей Резаля), могут быть получены проектированием момента M_y вокруг связанной оси y_1 на оси y', z'. Полагая в (7.42) $M_z = 0$ и учитывая (7.86), (7.87), находим

$$\left.\begin{aligned} M_y' &= M_y \cos\gamma = K\,(u_y \cos\omega t + u_z \sin\omega t)\cos\omega t = \\ &= K\left(u_y \cos^2\omega t + \frac{1}{2}u_z \sin 2\omega t\right); \\ M_z' &= M_y \sin\omega t = K\left(u_z \sin^2\omega t + \frac{1}{2}u_y \sin 2\omega t\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.88}$$

Вводя эти моменты в схему, показанную на рис. 7.20, получим структурную схему вращающейся ракеты с одним управляющим органом. Поскольку теперь система описывается линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, необходимо в структурной схеме оператор s заменить оператором $D = d/dt$, (рис. 7.28). По сравнению со случаем двухканального управления

структурная схема ракеты значительно усложнилась, так как содержит теперь периодически изменяющиеся параметры.

С целью упрощения анализа проведем идеализацию, а именно, будем предполагать ракету с нулевыми моментами инерции, а аэродинамическое демпфирование отсутствующим. Тогда, учитывая моменты (7.88), записываем уравнения ракеты (7.46) в виде:

$$\left.\begin{aligned} K\left(u_y \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} u_z \sin 2\omega t\right) + C_1 \beta = 0; \\ m_0 V \dot{\psi} = C_3 \beta; \\ K\left(u_z \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} u_y \sin 2\omega t\right) + C_1 \alpha = 0; \\ m_0 V \dot{\theta} = C_3 \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7.89}$$

Структурная схема сведется к схеме, обведенной на рис. 7.29 штриховой линией.

Вся схема, представленная на рис. 7.29, соответствует замкнутой системе «вращающаяся ракета — одноканальный автопилот» для случая, когда $W_0(D) = K_0 D$. Принятое выражение $W_0(s)$ означает, что человек-оператор, управляющий ракетой, посылает на борт команду, пропорциональную скорости изменения рассогласования между ракетой и целью. Конечно, данная передаточная функция не дает правильного описания работы оператора, но она удобна при последующем сравнительном анализе.

Уравнения, описывающие систему со структурной схемой, показанной на рис. 7.29, получаются добавлением к (7.89) уравнений кинематики

$$\ddot{h}_1 = V\dot{\Psi}, \quad \ddot{h}_2 = V\dot{\theta} \tag{7.90}$$

и уравнений $u_y = K_0 \dot{h}_1$, $u_z = K_0 \dot{h}_2$, описывающих работу оператора.

Обозначая сигналы на входе звеньев A и B соответственно через v и w, можно всю систему в целом (см. рис. 7.29) описать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{u}_y &= -av; \\ v &= \cos^2 \omega t \cdot u_y + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \cdot u_z; \\ \dot{u}_z &= -aw; \\ w &= \frac{1}{2} \sin 2\omega t \cdot u_y + \sin^2 \omega t \cdot u_z \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} = -a \begin{bmatrix} \cos^2 \omega t & \frac{1}{2} \sin 2\omega t \\ \frac{1}{2} \sin 2\omega t & \sin^2 \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \tag{7.91}$$

где

$$a = K_0 K C_3/(C_1 m_0). \qquad (7.92)$$

Уравнениям (7.91) соответствует структурная схема, изображенная на рис. 7.30. Эта схема представляет собой замкнутый контур, в котором осуществляется положительная обратная связь.

Обычно положительная обратная связь в замкнутом контуре обусловливает неустойчивость этого контура. Однако для возведения этого положения в общее правило нет оснований. Существуют и устойчивые замкнутые системы с положительной обратной связью.

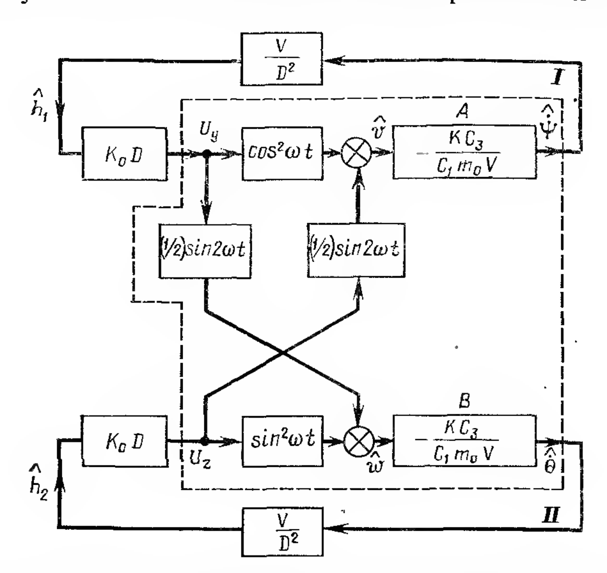


Рис. 7.29. Идеализированная система управления вращающейся ракеты с одноканальным автопилотом

Система (7.91) относится к классу линейных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Рассмотрим один из методов исследования устойчивости систем, подобных системе (7.91).

Критерий устойчивости Бонджиорно линейных систем с периодическими коэффициентами. Особенность системы уравнений (7.91) состоит в том, что она не сводится достаточно простым способом к одному дифференциальному уравнению относительно какой-либо переменной.

Однако, и это облегчает исследование, система состоит из линейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных (уравнения в форме Коши). Когда коэффициенты уравнений такой системы—периодические функции времени, известно несколько методов, позволяющих исследовать устойчивость соответствующей физической системы.

Ниже рассматривается критерий, предложенный Дж. Бонджиорно в 1964 г. и повсеместно применяемый сейчас при исследовании устой-

чивости линейных систем с периодическими коэффициентами. Этот критерий прост в применениях, но дает лишь достаточные условия устойчивости. Вследствие этого обстоятельства, по-видимому, возможны случаи, когда в действительности устойчивая система относится критерием к неустойчивым. Но если согласно критерию система устойчива, то реальная система и подавно устойчива.

Пусть система описывается матричным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} + \mathbf{K}(t)]\,\mathbf{x}, \tag{7.93}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор состояния системы; $\mathbf{A}$ — квадратная матрица $n \times n$, элементы которой — постоянные величины; $\mathbf{K}(t)$ — матрица того же типа $n \times n$ с элементами в виде периодических (с одинако-

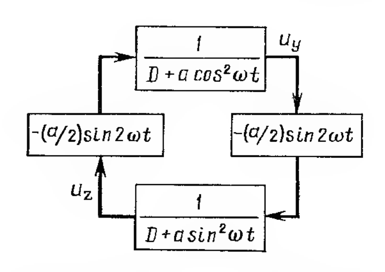


Рис. 7.30. Структурная схема, эквивалентная схеме, показанной на рис. 7.29

Рис. 7.31. Система, описываемая уравнением (7.94)

вым периодом) функций времени. Преобразуя (7.93) по Лапласу в предположении нулевых начальных условий, получим

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + L\{\mathbf{K}(t)\,\mathbf{x}(t)\}.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\, L\{\mathbf{K}(t)\,\mathbf{x}(t)\}. \tag{7.94}$$

Уравнению (7.94) соответствует структурная схема, изображенная на рис. 7.31. Знак π на этой схеме отмечает точку перемножения сигналов. Согласно этой схеме, вектор состояния $\mathbf{x}$ может рассматриваться как выходной сигнал стационарной части системы, характеризуемой матричной передаточной функцией

$$\mathbf{G}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}. \tag{7.95}$$

Входной сигнал $\mathbf{K}(t)\,\mathbf{x}(t)$ этой части образуется умножением вектора состояния на матрицу нестационарной части системы, показанную на структурной схеме как внешний матричный сигнал.

Условием применимости критерия устойчивости Бонджиорно является отсутствие у матричной передаточной функции $\mathbf{G}(s)$ полюсов, расположенных в правой полуплоскости s и на мнимой оси $j\omega$. Критерий формулируется следующим образом: для устойчивости линейной

системы с периодически изменяющимися параметрами достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|\mathbf{K}(t)\|_{\max} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_{\max} < 1, \tag{7.96}$$

где $\|\mathbf{K}(j\omega)\|$, $\|\mathbf{G}(j\omega)\|$ — нормы соответствующих матриц, причем максимальное значение нормы берется для первого сомножителя (7.96) в отношении t, а для второго — в отношении ω.

Под нормой некоторой матрицы $\mathbf{M}$ здесь подразумевается положительный квадратный корень из наибольшего собственного значения матрицы $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$, где $\mathbf{M}^*$ — матрица, получаемая из матрицы $\mathbf{M}$ заменой элементов сопряженно комплексными значениями и последующим транспонированием. В случае системы высокого порядка вычисление нормы матриц этим способом весьма трудоемкая операция. Можно, однако, норму матрицы типа $n \times n$ оценить с помощью неравенства

$$\|\mathbf{M}(x)\|_{\max} \leqslant \sqrt{n}\, |m_{rk}(x)|_{\max},$$

где m_{rk} — максимальный по модулю элемент матрицы (максимум берется как по всем значениям x, так и по всем r, $k = 1, 2, \ldots$). При использовании этого неравенства критерий устойчивости линейной системы с периодическими параметрами выражается более простым, но зато и более грубым неравенством

$$n\,|k_{rk}(t)|_{\max}\,|G_{\rho\nu}(j\omega)|_{\max} < 1, \tag{7.97}$$

где $|k_{rk}(t)|_{\max}$ — абсолютное значение наибольшего по модулю элемента матрицы $\mathbf{K}(t)$ (максимум берется в отношении t, r, k); $|G_{\rho\nu}(j\omega)|$ — абсолютное значение наибольшего по модулю элемента матрицы $\mathbf{G}(j\omega)$ (максимум берется в отношении ω, ρ, ν).

В качестве примера исследуем с помощью критерия Бонджиорно устойчивость системы (7.91), описывающей в идеализированной постановке одноканальную систему управления вращающейся ракеты. Разделяя матрицу системы на стационарную (постоянную) и периодическую части, можно (7.91) переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} = \left\{ -a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos 2\omega t & \frac{1}{2}\sin 2\omega t \\ \frac{1}{2}\sin 2\omega t & -\frac{1}{2}\cos 2\omega t \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_y \\ u_z \end{bmatrix}.$$

Сравнивая с (7.93), находим

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a/2 & 0 \\ 0 & -a/2 \end{bmatrix}; \tag{7.98a}$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} -(a/2)\cos 2\omega t & -(a/2)\sin 2\omega t \\ -(a/2)\sin 2\omega t & (a/2)\cos 2\omega t \end{bmatrix}. \tag{7.98б}$$

Согласно формуле (7.95) получим матричную передаточную функцию стационарной части системы

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -a/2 & 0 \\ 0 & -a/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+(a/2) & 0 \\ 0 & s+(a/2) \end{bmatrix}.$$

Обращая эту матрицу, находим

$$\mathbf{G}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+(a/2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+(a/2)} \end{bmatrix} \quad (7.99)$$

Будем применять критерий устойчивости, выражаемый неравенством (7.96). Найдем сначала норму матрицы $\mathbf{K}(t)$. Принимая во внимание (7.98 б), имеем

$$\mathbf{K}^*(t)\,\mathbf{K}(t)=\begin{bmatrix} -\frac{a}{2}\cos 2\omega t & -\frac{a}{2}\sin 2\omega t \\ -\frac{a}{2}\sin 2\omega t & \frac{a}{2}\cos 2\omega t \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} -\frac{a}{2}\cos 2\omega t & -\frac{a}{2}\sin 2\omega t \\ -\frac{a}{2}\sin 2\omega t & \frac{a}{2}\cos 2\omega t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{4} \end{bmatrix}. \quad (7.100)$$

Собственные значения λ_i матрицы $\mathbf{K}^*(t)\,\mathbf{K}(t)$ находятся из уравнения

$$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{K}^*(t)\,\mathbf{K}(t)=\begin{bmatrix} \lambda-\frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{a^2}{4} \end{bmatrix}=0. \quad (7.101)$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{K}(t)\|=a^2/4. \quad (7.102)$$

Перейдем теперь к определению нормы матрицы $\mathbf{G}(j\omega)$. Основываясь на (7.99), получаем:

$$\mathbf{G}^*(j\omega)\,\mathbf{G}(j\omega)=\begin{bmatrix} \frac{1}{-j\omega+a/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-j\omega+a/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega+a/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega+a/2} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{4}{4\omega^2+a^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{4\omega^2+a^2} \end{bmatrix};$$

$$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{G}^*(j\omega)\,\mathbf{G}(j\omega)=\begin{bmatrix}\lambda-\dfrac{4}{4\omega^2+a^2} & 0\\ 0 & \lambda-\dfrac{4}{4\omega^2+a^2}\end{bmatrix}=0;$$

$$\|\mathbf{G}(j\omega)\|=\frac{4}{4\omega^2+a^2};\ \|\mathbf{G}(j\omega)\|_{\max}=$$

$$=\|\mathbf{G}(j\omega)\|_{\omega=0}=4/a^2. \qquad (7.103)$$

Подстановка значений (7.102), (7.103) в неравенство (7.96), выражающее условие устойчивости, показывает, что неравенство обращается в равенство. Следовательно, согласно критерию Бонджиорно система (7.91) нейтральна.

Интересно отметить, что и по методу замораживания коэффициентов система (7.91) нейтральна, так как в этом случае левая часть характеристического уравнения имеет нулевой корень:

$$\det\left\{\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}\cos^2\omega t & \dfrac{1}{2}\sin 2\omega t\\ \dfrac{1}{2}\sin 2\omega t & \sin^2\omega t\end{bmatrix}\right\}=\lambda(\lambda+a),$$

Чтобы не создавалось впечатления о совпадении результатов исследования по критерию Бонджиорно и по методу замораживания коэффициентов в любом случае, исследуем этими методами систему

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-1+\dfrac{3}{2}\cos^2 t & 1-\dfrac{3}{4}\sin 2t\\ -1-\dfrac{3}{4}\sin 2t & -1+\dfrac{3}{2}\sin^2 t\end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad (7.104)$$

напоминающую только что рассмотренную (7.91), но, в отличие от нее, имеющую известное точное решение. Действуя так же, как в предыдущем случае, находим:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1/4 & 1\\ -1 & -1/4\end{bmatrix};\ \mathbf{K}(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{4}\cos 2t & -\dfrac{3}{4}\sin 2t\\ -\dfrac{3}{4}\sin 2t & -\dfrac{3}{4}\cos 2t\end{bmatrix};$$

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}s+1/4 & -1\\ 1 & s+1/4\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}(s+1/4)/[(s+1/4)^2+1] & 1/[(s+1/4)^2+1]\\ -1/[(s+1/4)^2+1] & (s+1/4)/[(s+1/4)^2+1)\end{bmatrix}.$$

Передаточная функция G не имеет полюсов в правой полуплоскости и на мнимой оси, что дает возможность применить к системе (7.104) критерий устойчивости Бонджиорно. Вычисляя, как указывалось выше, норму матрицы $\mathbf{G}(j\omega)$, получим $\| \mathbf{G}(j\omega) \| = \sqrt{\frac{\omega^2 + 2\omega + 17/16}{(\omega^2 - 17/16)^2 + \omega^2/4}}$.

Исследование этой функции на максимум дает $\| \mathbf{G}(j\omega) \|_{max} = 4$. Подставляя $\| \mathbf{G}(j\omega) \| = 4$ и $\| \mathbf{K}(t) \| = \frac{3}{4}$ в неравенство (7.96), видим, что это неравенство не выполняется. Следовательно, согласно критерию Бонджиорно система (7.104) неустойчива.

Исследуем теперь систему (7.104) методом замораживания коэффициентов. Составляя выражение левой части характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 - \frac{3}{2}\cos^2 t & -1 + \frac{3}{4}\sin 2t \\ 1 + \frac{3}{4}\sin 2t & \lambda + 1 - \frac{3}{2}\sin^2 t \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda/2 + 1/2$$

видим, что метод замораживания коэффициентов приводит к противоположному результату (вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны и, следовательно, система устойчива).

Точное решение исследуемой системы (подставляя его в уравнение (7.104), в этом можно убедиться) имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -e^{t/2}\cos t \\ e^{t/2}\sin t \end{bmatrix}, \qquad (7.105)$$

т. е. указывает на неустойчивость системы. Таким образом, в отличие от метода замораживания коэффициентов, критерий устойчивости Бонджиорно, как и следовало ожидать, привел к правильному результату.

Сравнение одноканальной и двухканальной систем управления. Проведенная выше идеализация вращающейся ракеты и системы управления (пренебрежение моментами инерции и запаздываниями) приводит к системе, обладающей при прочих равных условиях лучшей устойчивостью, чем реальная система управления. При такой идеализации двухканальная система управления вращающейся ракеты, рассмотренная в § 7.3, распадается на два независимых канала, каждый из которых представляется инерционным звеном. Выбором параметра a (см. 7.92) можно постоянной времени этого инерционного звена придать любое значение и обеспечить тем самым любые сколь угодно высокие показатели качества регулирования.

При той же самой идеализации одноканальная система управления вращающейся ракеты представляется системой с периодическими параметрами (7.91). Из критерия Бонджиорно, часто применяющегося для исследования устойчивости линейных периодических систем, вывода об устойчивости системы (7.91) не следует. Однако, как уже отмечалось, этот критерий дает лишь достаточные условия устойчи-

вости, т. е. может предъявить к системе завышенные требования. Поэтому вытекающий из него вывод об отсутствии устойчивости одноканальной системы управления вращающихся ракет нельзя рассматривать как обоснованный. Более точное исследование можно произвести на основании теории Флоке линейных систем с периодическими коэффициентами путем численного интегрирования уравнений (7.91) на протяжении одного периода изменения коэффициентов.

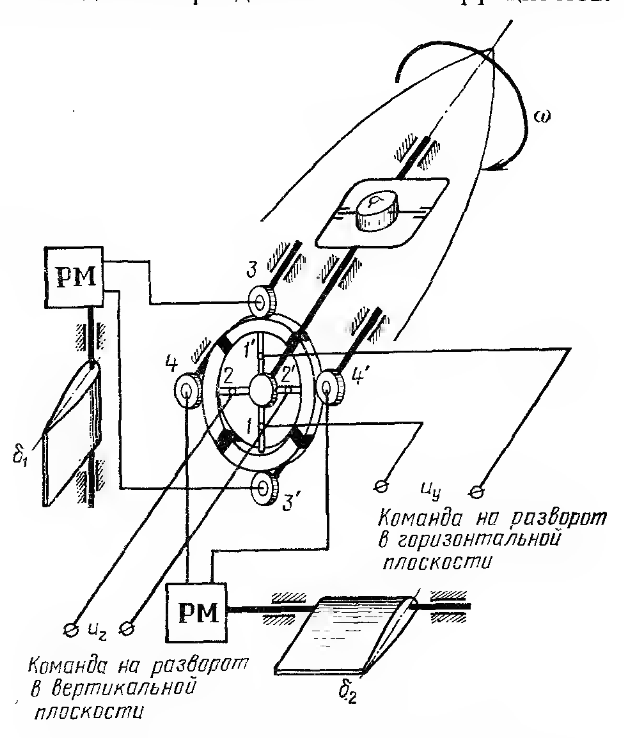


Рис. 7.32. Принципиальная схема автопилота вращающейся ракеты со стабилизированным коллектором

В заключение заметим, что с целью упрощения аппаратуры СКВТ (см. рис. 7.16) заменяются стабилизированным при помощи гироскопа крена коллектором (рис. 7.32). Ролики *3*, *3'*, *4*, *4'* вращающиеся относительно коллектора вместе с ракетой, периодически контактируют с изолированными друг от друга проводящими ламелями *1*, *1'* и *2*, *2'*, так что на входы вращающихся вместе с ракетой рулевых трактов поступают амплитудно-модулированные прямоугольные колебания. Демодуляция при переходе к невращающейся системе координат по-прежнему осуществляется умножением на синусоидальные сигналы. Поскольку «рабочей» является основная гармоника прямоугольных колебаний, полученные выше выводы для систем с СКВТ в принципиальном отношении сохраняются и для систем, содержащих коллекторы.

Глава VIII

ДИНАМИКА САМОНАВОДЯЩИХСЯ РАКЕТ

Принципиальный недостаток телеуправляемых ракет заключается в том, что по мере приближения ракеты к цели точность наведения ухудшается. Действительно, чем больше дальность R ракеты от пункта наведения, тем при одном и том же угловом рассогласовании ε между ракетой и целью больше линейное отклонение $h = R\varepsilon$ ракеты от линии визирования цели. Поскольку человек-оператор (или бортовой приемник при наведении по лучу РЛС) реагирует на угловое рассогласование ε (человек-оператор реагирует также на производные от ε), это рассогласование примерно одинаково при всех дальностях R, так что с ростом R промах $h = \varepsilon R$ возрастает.

Обратная картина наблюдается при самонаведении ракеты на цель по методу пропорциональной навигации. В случае использования этого метода управляющим сигналом для ракеты служит угловая скорость линии, соединяющей ракету с целью (линии визирования цели с борта ракеты). По мере сокращения расстояния между ракетой и целью (т. е. уменьшения длины линии визирования) угловая скорость линии визирования при тех же значениях нормальных к ней составляющих скорости ракеты и цели возрастает, т. е. чувствительность системы самонаведения повышается.

Недостатком системы самонаведения по сравнению с системой телеуправления может быть меньшая дальность действия. Поэтому возможны комбинированные системы, когда после старта ракета управляется по лучу, а после захвата цели координатором переходит на самонаведение.

Помимо метода пропорциональной навигации известны и другие методы самонаведения (метод погони, метод параллельного сближения и др.). Эти методы здесь не рассматриваются, так как уступают методу пропорциональной навигации или в отношении малой величины боковых перегрузок ракеты (метод погони), или в отношении простоты аппаратурной реализации (метод параллельного сближения).

§ 8.1. МЕТОД ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Согласно методу пропорциональной навигации вектор $\bar{V}_р$ скорости ЦТ ракеты принуждают поворачиваться с угловой скоростью Ω, пропорциональной угловой скорости ν линии визирования цели с борта ракеты, причем этот поворот производят в таком направлении, при котором угловая скорость линии визирования уменьшается.

В номинальном (равновесном) состоянии угловая скорость линии визирования равна нулю и эта линия перемещается в пространстве поступательно. Такое состояние имеет место, когда векторы скорости цели и ракеты лежат в одной и той же плоскости, а их составляющие, перпендикулярные линии визирования, одинаковы; сближение ракеты с целью происходит за счет проекций векторов скорости ракеты и цели на линию визирования (рис. 8.1 а).

Аппаратурно метод пропорциональной навигации можно реализовать таким образом. На борту ракеты устанавливается стабилизированный с помощью гироскопов радиолокационный или тепловой координатор, осуществляющий за счет прецессии гироскопов автомати-

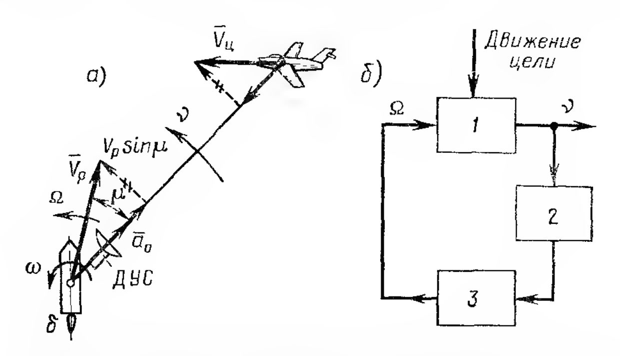


Рис. 8.1. Линейные и угловые скорости (*а*) и замкнутый контур (*б*) при самонаведении, осуществляемом по методу пропорциональной навигации

ческое сопровождение цели. Прецессия стабилизирующих гироскопов вызывается моментными датчиками, питаемыми от электронной части координатора, с которой снимаются сигналы, пропорциональные рассогласованию между линией визирования и осью координатора. Эти сигналы в установившемся состоянии аналогичны скоростным ошибкам обычной следящей системы и в данном случае пропорциональны абсолютной угловой скорости линии визирования цели. Следовательно, сигналы рассогласования между линией визирования и осью координатора могут служить мерой угловой скорости линии визирования и использоваться для управления положением вектора скорости ракеты с целью сведения к нулю угловой скорости линии визирования.

Управление угловым положением вектора скорости ракеты осуществляется подачей указанных сигналов на автопилот, отклоняющий рули ракеты. Поворот вектора скорости ракеты $\bar{V}_р$ приводит к изменению составляющей этого вектора, перпендикулярной линии визирования, и, следовательно, к изменению угловой скорости данной линии. Таким образом, управляемая ракета и линия визирования цели образуют замкнутый контур втоматического регулирования (см. рис. 8.1,*б*), в котором угловая скорость ν линии визирования — регулируемая величина (номинальным значением регулируемой

величины служит $\nu_0 = 0$). В дальнейшем этот контур называется *контуром самонаведения.*

Самонаведение будет осуществляться в том случае, когда контур самонаведения устойчив, так как лишь при устойчивости контура $\nu(t) \to 0$. Но устойчивость можно исследовать, когда известны уравнения всех звеньев замкнутого контура.

Звеньями контура самонаведения являются звено *1*, представляющее «кинематику самонаведения», система автосопровождения цели *2* и система «ракета — автопилот» *3*. Уравнения этих звеньев для случая, когда векторы скорости ракеты и цели лежат в одной плоскости (плоский случай самонаведения), выводятся ниже.

§ 8.2. УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИКИ

Угловая скорость линии визирования изображается вектором, который все время перпендикулярен линии визирования и определяется формулой

$$\bar{\nu} = \frac{1}{r^2}\left[\bar{r}\,\bar{V}_{ц/р}\right] = \frac{1}{r^2}\left[\bar{r}\,\dot{\bar{r}}\right], \tag{8.1}$$

где $\bar{\nu}$ — вектор угловой скорости линии визирования; $r = r\bar{r}_0$ — вектор, равный произведению длины линии визирования r на единичный вектор $\bar{r}_0$, направленный от ракеты вдоль линии визирования; $\bar{V}_{ц/р} = \bar{V}_ц - \bar{V}_р$ — скорость цели по отношению к ракете ($\bar{V}_ц$ — скорость цели, $\bar{V}_р$—скорость ракеты). Здесь как и раньше, квадратными скобками отмечается векторное произведение, а круглыми — скалярное произведение.

Формулу можно записать также в виде

$$\bar{\nu} = \frac{1}{r^2}\left[\bar{r}\,\dot{\bar{r}}\right] = \frac{1}{r^2}\left[r\bar{r}_0\left(\dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\bar{r}}_0\right)\right] = \left[\bar{r}_0\,\dot{\bar{r}}_0\right]. \tag{8.2}$$

Обозначим через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ орты осей связанной с ракетой системы $x_1y_1z_1$. Будем рассматривать только плоский случай самонаведения, когда векторы скорости ракеты и цели находятся в одной плоскости, сохраняющей неизменную ориентацию относительно инерциальной системы отсчета. Оси x_1, y_1 связанной с ракетой системы будем считать постоянно находящимися в плоскости самонаведения.

Пусть $\bar{\omega}$ — вектор угловой скорости ракеты. Так как рассматривается плоский случай самонаведения, проекции этого вектора ω_x, ω_y на оси x_1, y_1 связанной системы равны нулю, а проекция на ось z_1, перпендикулярную плоскости самонаведения, есть $\omega_z = \omega$. Следовательно, $\bar{\omega} = \bar{k}\omega$.

Обозначив через σ угол пеленга цели с борта ракеты, т. е. угол между продольной осью ракеты x_1 и линией визирования $\bar{r}_0$ (рис. 8.2), получим для угловой скорости линии визирования следующее выражение:

$$\bar{\nu} = \nu\bar{k} = (\omega + \dot{\sigma})\,\bar{k}. \tag{8.3}$$

Другими словами, скорость ν складывается из угловой скорости ω при движении линии визирования вместе с ракетой и угловой скорости $\dot{\sigma}$ этой линии относительно ракеты. Приравнивая правые части уравнений (8.1) и (8.3), получим

$$\left[\bar{r}\,\bar{V}_{ц/р}\right] = r^2 \nu \bar{k}. \tag{8.4}$$

Скалярно умножив обе части на $\bar{k}$, находим

$$\left(\bar{k}\left[\bar{r}\,\bar{V}_{ц/р}\right]\right) = \nu r^2. \tag{8.5}$$

Левую часть этого уравнения можно преобразовать следующим образом

$$\left(k\left[\bar{r}\,\bar{V}_{ц/р}\right]\right) = \left(V_{ц/р}\left[\bar{k}\,\bar{r}\right]\right) = -\left(\bar{V}_{ц/р}\left[\bar{r}\left[\bar{i}\,\bar{j}\right]\right]\right).$$

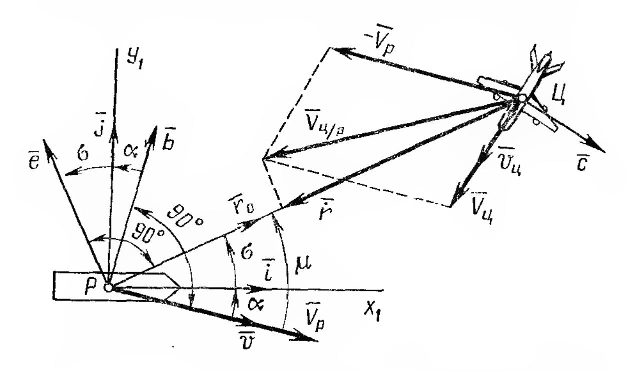


Рис. 8.2. Плоскость самонаведения и лежащие в ней векторы

Раскрывая двойное векторное произведение и вводя в рассмотрение единичный вектор (см. рис. 8.2)

$$\bar{e} = -\bar{i}\sin\sigma + \bar{j}\cos\sigma, \tag{8.6}$$

находим

$$\left(\bar{k}\left[\bar{r}\,\bar{V}_{ц/р}\right]\right) = -\left(\bar{V}_{ц/р}\left\{\bar{i}\left(\bar{r}\,\bar{j}\right) - \bar{j}\left(\bar{r}\,\bar{i}\right)\right\}\right) =$$

$$= -r\left(\bar{V}_{ц/р}\left\{\bar{i}\sin\sigma - \bar{j}\cos\sigma\right\}\right) = r\left(\bar{V}_{ц/р}\,\bar{e}\right).$$

Таким образом, при учете $\bar{V}_{ц/р} = \bar{V}_ц - \bar{V}_р$ уравнение (8.5) принимает вид

$$\nu r = \left(\left(\bar{V}_ц - \bar{V}_р\right)\bar{e}\right).$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим

$$\dot{\nu} r + \nu \dot{r} = \left(\bar{V}_{ц/р}\,\dot{\bar{e}}\right) + \left(\dot{\bar{V}}_ц\,\bar{e}\right) - \left(\dot{\bar{V}}_р\,\bar{e}\right). \tag{8.7}$$

Единичный вектор $\bar{e}$ по отношению к связанной системе $x_1y_1z_1$ обладает лишь степенью свободы $\dot{\sigma}\bar{k}$. Производная этого вектора равна линейной скорости его конца, так что

$$\dot{\bar{e}} = [(\bar{\omega} + \dot{\sigma}\bar{k})\,\bar{e}] = (\omega + \dot{\sigma})\,[\bar{k}\,\bar{e}] = -\nu\bar{r}_0.$$

Следовательно, первый член правой части (8.7) можно записать в следующем виде:

$$(\bar{V}_{ц/р}\,\dot{\bar{e}}) = -\nu\,(\bar{V}_{ц/р}\,\bar{r}_0). \qquad (8.8)$$

Преобразуем теперь последний член в правой части (8.7). Представив скорость ракеты как $\bar{V}_р = V_р\bar{v}$, где $\bar{v}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора $\bar{V}_р$, получим

$$\dot{\bar{V}}_р = \dot{V}_р\,\bar{v} + V_р\,\dot{\bar{v}}.$$

Вектор $\bar{v}$ обладает по отношению к системе ракеты лишь степенью свободы — $\dot{\alpha}\bar{k}$, где α — угол атаки ракеты. Знак минус здесь поставлен по той причине, что при выбранном направлении положительного отсчета α вектор положительной скорости поворота вектора v относительно системы $x_1y_1z_1$, т. е. такой скорости, при которой происходит увеличение α, будет направлен по отрицательной части оси z_1 (см. рис. 8.2.) Поэтому

$$\dot{\bar{v}} = [(\bar{\omega} - \dot{\alpha}\bar{k})\,\bar{v}] = (\omega - \dot{\alpha})\,[\bar{k}\,\bar{v}] = (\omega - \dot{\alpha})\,\bar{b},$$

где $\bar{b}$ — единичный вектор, перпендикулярный скорости $\bar{V}_р$ (см. рис. 8.2).

Таким образом, последний член правой части (8.7) можно записать в виде

$$(\dot{\bar{V}}_р\,\bar{e}) = \dot{V}_р\,(\bar{v}\,\bar{e}) + V_р\,\Omega\,(\bar{b}\,\bar{e}), \qquad (8.9)$$

где учтено, что $\Omega = \omega - \dot{\alpha}$ — скорость поворота вектора скорости $\bar{V}_р$.

Подставив теперь (8.8) и (8.9) в уравнение (8.7), получим следующее уравнение кинематики самонаведения:

$$\dot{\nu}r + \nu\dot{r} + (\bar{V}_{ц/р}\,\bar{r}_0)\,\nu + V_р\,(\bar{b}\,\bar{e})\,\Omega = ((\dot{\bar{V}}_ц - \dot{V}_р\,\bar{v})\,\bar{e}). \qquad (8.10)$$

Как видно из рис. 8.2, скалярное произведение $(\bar{V}_{ц/р}\bar{r}_0)$ равно отрицательной величине $\dot{r}$, представляющей скорость сближения ракеты с целью. Что касается других, входящих в (8.10) скалярных произведений, то из этого же рисунка находим

$$(\bar{b}\,\bar{e}) = \cos(\alpha + \sigma), \qquad (\bar{v}\,\bar{e}) = -\sin(\alpha + \sigma).$$

В окончательном виде уравнение кинематики самонаведения

$$T_{\text{к}}\dot{\nu}-\nu+q\Omega=S, \tag{8.11}$$

где

$$T_{\text{к}}=r/(2|\dot{r}|),\quad q=V_{\text{р}}\cos(\alpha+\sigma)/(2|\dot{r}|), \tag{8.12}$$

$$S=\frac{1}{2|\dot{r}|}\{(\dot{\overline{V}}_{\text{ц}}\bar{e})+\dot{V}_{\text{р}}\sin(\alpha+\sigma)\}. \tag{8.13}$$

Выражение (8.13) показывает, что внешнее возмущение S, действующее на кинематическое звено (8.11), зависит только от ускорений ракеты и цели, перпендикулярных линий визирования.

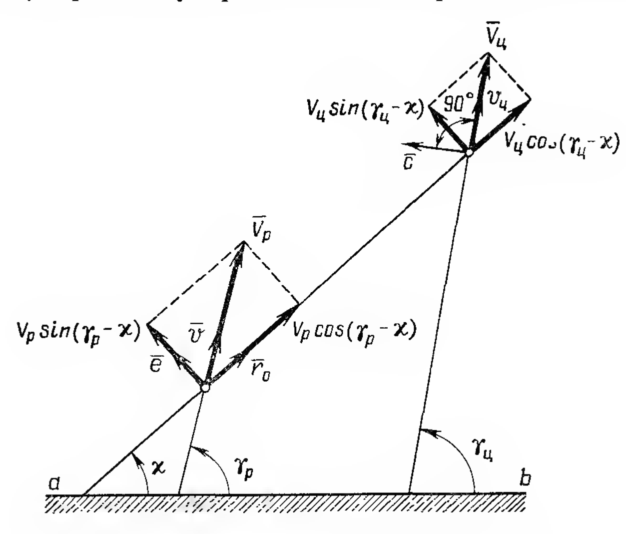


Рис. 8.3. Положение векторов относительно системы ориентировки

Обычно уравнение кинематики (8.11) выводят другим более простым способом [8, 9]. Способ основывается на рассмотрении геометрической картины движения, иллюстрируемой на рис. 8.3. Стрелками здесь указаны направления положительного отсчета углов, определяющих положение линии визирования и векторов $\overline{V}_{\text{р}}$, $\overline{V}_{\text{ц}}$ относительно неподвижного направления ab. Согласно этой картине можно написать

$$\dot{\chi}=V_{\text{ц}}\sin(\gamma_{\text{ц}}-\chi)/r-V_{\text{р}}\sin(\gamma_{\text{р}}-\chi)/r; \tag{8.14а}$$

$$\dot{r}=-V_{\text{р}}\cos(\gamma_{\text{р}}-\chi)+V_{\text{ц}}\cos(\gamma_{\text{ц}}-\chi). \tag{8.14б}$$

Знак плюс перед первым и знак минус перед вторым членом (8.14 а) объясняется тем обстоятельством, что при указанной на рис. 8.3 величине углов составляющая скорости $\overline{V}_{\text{ц}}$ $\sin(\gamma_{\text{ц}}-\chi)$ вращает

линию визирования в направлении увеличения, а составляющая $V_р \sin(\gamma_р - \chi)$ — в направлении уменьшения угла χ. Аналогичными соображениями объясняются и знаки в уравнении (8.14 б): составляющая $V_р \cos(\gamma_р - \chi)$ уменьшает, а составляющая $V_ц \cos(\gamma_ц - \chi)$ увеличивает расстояние r.

Умножив обе части уравнения (8.14 а) на r, а затем продифференцировав это уравнение по времени, после некоторых преобразований получим:

$$\ddot{\chi} r + \dot{\chi}\dot{r} + V_p \cos(\gamma_p - \chi)\dot{\gamma}_p = -\dot{\chi}[-V_p \cos(\gamma_p - \chi) + V_ц \cos(\gamma_ц - \chi)] - \\ - \dot{V}_р \sin(\gamma_p - \chi) + \dot{V}_ц \sin(\gamma_ц - \chi) + V_ц \cos(\gamma_ц - \chi)\dot{\gamma}_ц. \quad (8.15)$$

Учитывая (8.14 б), замечаем, что первый член в правой части уравнения (8.15) равен $-\dot{\chi}\dot{r}$, так что это уравнение после введения обозначений $\dot{\chi} = \nu$; $\dot{\gamma}_р = \Omega$; $\dot{\gamma}_ц = \Omega_ц$ можно записать в виде:

$$r\dot{\nu} + 2\dot{r}\nu + V_p \cos(\gamma_p - \chi)\Omega = -\dot{V}_p \sin(\gamma_p - \chi) + \\ + \dot{V}_ц \sin(\gamma_ц - \chi) + V_ц \cos(\gamma_ц - \chi)\Omega_ц. \quad (8.16)$$

Нетрудно убедиться, что полученное уравнение кинематики плоского самонаведения совпадает с ранее выведенным уравнением (8.11) Сопоставление рис. 8.2 с рис. 8.3 показывает, что $\gamma_р - \chi = -(\alpha + \sigma)$, откуда следует совпадение членов уравнений, содержащих $V_р$ и $\dot{V}_р$. Совпадение оставшихся членов можно проверить, выполнив следующие преобразования. Учитывая, что

$$\dot{\bar{V}}_ц = \dot{V}_ц \bar{v}_ц + [\bar{\Omega}_ц \bar{V}_ц] = \dot{V}_ц \bar{v}_ц + \Omega_ц V_ц [\bar{k}\bar{v}_ц] = \dot{V}_ц \bar{v}_ц + \Omega_ц V_ц \bar{c},$$

где $\bar{v}_ц$ и $\bar{c}$ — единичные векторы (см. рис. 8.2, 8.3), можно соответствующий член правой части (8.11) записать в виде $(\dot{\bar{V}}_ц \bar{e}) = \dot{V}_ц (\bar{v}_ц \bar{e}) + \Omega_ц V_ц (\bar{c}\bar{e})$.

Входящие в это уравнение скалярные произведения определяются выражениями (см. рис. 8.3)

$$(\bar{v}_ц \bar{e}) = \sin(\gamma_ц - \chi), \quad (\bar{c}\bar{e}) = \cos(\gamma_ц - \chi),$$

откуда следует совпадение членов уравнений (8.11) и (8.16), содержащих $V_ц$ и $\dot{V}_ц$.

Первый метод составления кинематического уравнения имеет преимущество перед вторым в том отношении, что не связан с необходимостью введения неподвижного направления ab и углов, составляемых векторами с этим направлением. Вообще следует отметить, что кинематика самонаведения совершенно не зависит от углового положения ракеты, цели и линейных скоростей этих объектов относительно системы ориентировки, а определяется лишь движением цели относительно связанной с ракетой системы координат.

§ 8.3. О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КООРДИНАТОРА

Контур самонаведения устойчив только в том случае, когда колебания ракеты вокруг ЦТ не передаются (или мало передаются) на ось $\bar{a}_0$ бортового координатора цели. В этом можно убедиться на примере плоской системы самонаведения, рассмотренной в предыдущем разделе.

Как уже отмечалось, координатор, осуществляющий автосопровождение цели, предназначен для измерения угловой скорости ν линии визирования. Это измерение может, например, производиться ДУСом, связанным с осью $\bar{a}_0$ координатора (см. рис. 8.1, *а*). Выходной сигнал ДУСа подается на автопилот, который должен заставить вектор скорости ракеты $\bar{V}_p$ повернуться так, чтобы угловая скорость ν сводилась к нулю.

Предположим теперь, что ось координатора $\bar{a}_0$, находясь вблизи линии визирования $\bar{r}_0$, совершает вместе с корпусом ракеты колебания вокруг центра масс ракеты (нестабилизированный координатор). В этом случае вращение ω ракеты, например, против часовой стрелки (см. рис. 8.1 *а*) воспринимается ДУСом координатора как будто происходящее за счет поворота линии визирования; ДУС посылает на рули ракеты сигнал, который должен устранить это в действительности не существующее вращение линии визирования. Для увеличения нормальной составляющей скорости $V_p \sin \mu$ (ликвидация вращения линии визирования осуществляется за счет изменения $V_p \sin \mu$) данный сигнал отклонит руль по часовой стрелке, что заставит ракету еще сильнее вращаться против часовой стрелки (см. рис. 8.1, *а*). Таким образом, вокруг ракеты возникает положительная обратная связь и ракета становится неустойчивой относительно центра масс.

Устойчивость ракеты относительно центра масс может быть обеспечена или за счет применения достаточно жесткой системы автосопровождения (системы с широкой полосой пропускания), или за счет гироскопической стабилизации оси координатора $\bar{a}_0$ в инерциальном пространстве. Первый способ практически реализуем только в случае достаточно тяжелых ракет, частота колебаний которых относительно центра масс невелика. В малогабаритных зенитных ракетах применяется второй способ, т. е. гироскопическая стабилизация координатора.

В простейшем варианте гиростабилизированный координатор выполняют в виде астатического гироскопа в кардановом подвесе, причем осью $\bar{a}_0$ координатора служит ось фигуры гироскопа. Поскольку гироскоп трехстепенный, ось $\bar{a}_0$ при колебаниях ракеты сохраняет свое угловое положение в пространстве неизменным.

Слежение оси $\bar{a}_0$ за линией визирования (автосопровождение цели) осуществляется за счет прецессии гироскопа, вызываемой моментными датчиками M_1, M_2 на осях колец карданова подвеса (рис. 8.4). Моментные датчики питаются напряжениями, поступающими с электрической части координатора.

В случае радиолокационного координатора собственное вращение ротора гироскопа служит и для вращения диполя радиолокационной антенны координатора (сканирование); в случае теплового координатора собственное вращение ротора используется для модуляции инфракрасного излучения цели, принимаемого оптической частью координатора.

Радиолокационный (или теплопеленгационный) тракт вместе с электронной частью координатора формируют напряжение u_a,

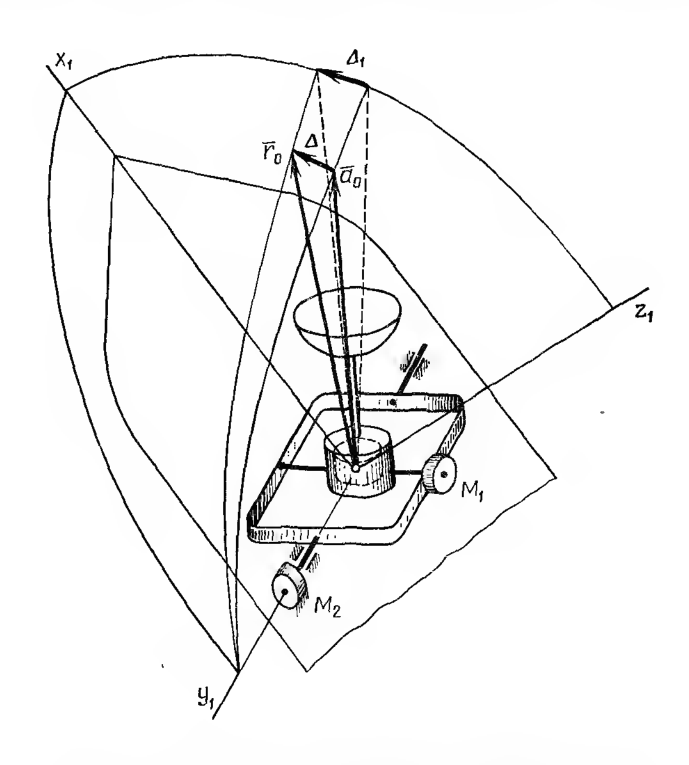


Рис. 8.4. Гиростабилизированный координатор цели

пропорциональное углу Δ между осью координатора $\bar{a}_0$ и линией визирования $\bar{r}_0$. С помощью коммутатора, к которому подводятся два опорных напряжения той же частоты, что и частота сканирования (в тепловом координаторе — частота модуляции), напряжение $u_a = C_1\Delta$ раскладывается на две составляющие. Эти составляющие с соответствующим усилением подаются на моментные датчики координатора, которые вызывают прецессию оси $\bar{a}_0$ гироскопа к линии визирования $\bar{r}_0$ цели по кратчайшему пути со скоростью, пропорциональной рассогласованию Δ (упругая радиальная коррекция).

§ 8.4. УРАВНЕНИЕ АВТОСОПРОВОЖДЕНИЯ

Рассогласование Δ между осью $\bar{a}_0$ координатора и линией визирования $\bar{r}_0$ зависит от угловой скорости ν линии визирования и может служить ее мерой. Поэтому напряжение $u_a = C_1\Delta$, о котором говорилось в § 8.3, подается не только на координатор, но и на автопилот ракеты в качестве управляющего сигнала.

Уравнение автосопровождения связывает угловую скорость ν линии визирования с рассогласованием Δ. Пусть ν^* — скорость прецессии гироскопа — координатора, а $W(s)$—передаточная функция электромагнитной части координатора. Поскольку скорость прецессии пропорциональна приложенному к гироскопу моменту, имеем

$$\hat{\nu}^* = W(s)\,\hat{\Delta}. \qquad (8.17)$$

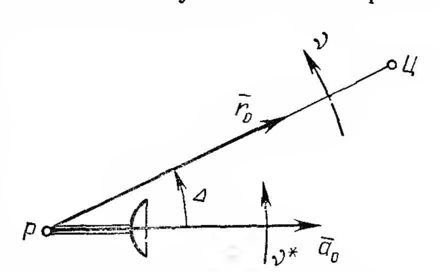


Рис. 8.5. Линия визирования цели и ось симметрии координатора

Здесь использована безнутационная теория гироскопа, обеспечивающая достаточно точный результат лишь при небольших («мертвых» массах (кольца подвеса и связанные с ними детали).

Из геометрических соображений получаем (рис. 8.5)

$$\nu = \nu^* + \dot{\Delta}. \qquad (8.18)$$

Учитывая это выражение в уравнении (8.17), находим следующее уравнение автосопровождения

$$\dot{\Delta} + W(D)\,\Delta = \nu. \qquad (8.19)$$

§ 8.5. О ГИРОСКОПЕ КРЕНА

Положение в пространстве плоскости, определяемой векторами $\bar{a}_0$, $\bar{r}_0$ (плоскость угла рассогласования Δ), не зависит от угловых колебаний ракеты вокруг ЦТ. Инвариантность плоскости $\bar{a}_0\bar{r}_0$ по отношению к колебаниям ракеты освобождает от необходимости иметь на борту самонаводящейся ракеты гироскоп крена, который является обязательной принадлежностью телеуправляемой ракеты.

Действительно, спроектировав угол рассогласования Δ на продольные плоскости ракеты x_1y_1, x_1z_1 (это проектирование возможно реализовать схемой координатора), получим сигналы Δ_1, Δ_2, являющиеся мерой составляющих угловой скорости линии визирования по направлениям поперечных осей y_1, z_1 ракеты (см. рис. 8.4). Поскольку оси вращения рулей параллельны осям y_1, z_1, можно на основе имеющихся в распоряжении сигналов Δ_1, Δ_2 сформировать два контура самонаведения (один контур относится к продольной плоскости x_1z_1, а другой — к плоскости x_1y_1).

Такое разложение пространственной задачи самонаведения на две плоскостные осуществляется при любом угле крена ракеты, независимо от того, является ли он постоянным или изменяется во времени. Отсюда следует, что в составе автопилота самонаводящейся ракеты гироскоп крена может отсутствовать.

§ 8.6. РОЛЛЕРОНЫ

Угловая скорость ω_x ракеты вокруг продольной оси обусловливает перекрестные связи между плоскостями управления x_1y_1, x_1z_1, выражением которых являются гироскопические члены $(J - J_x)\,\omega_x\omega_y$, $(J - J_x)\,\omega_x\omega_z$ в уравнениях движения ракеты (7.30). Кроме того, существуют перекрестные связи, возникающие при $\omega_x \neq 0$ из-за перекоса исполнительной оси по отношению к измерительной за время

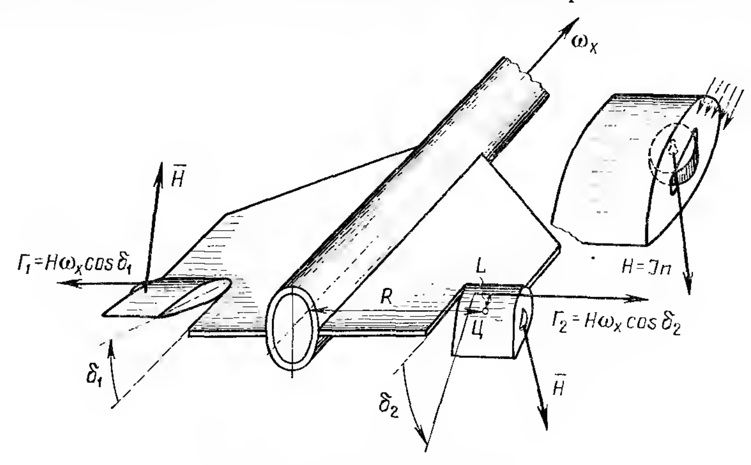


Рис. 8.6. Ракета с роллеронами

распространения сигнала от чувствительных элементов к рулям. Перекрестные связи, вообще говоря, нежелательны и для их ликвидации на ракете применяют специальные устройства. К таким устройствам относятся роллероны, отличающиеся от обычных элеронов тем, что их отклонение производится не рулевой машинкой, а содержащимся в теле элерона маховиком (рис. 8.6).

Обод маховика снабжается зубчатой насечкой, действуя на которую набегающий поток раскручивает маховик до нескольких тысяч оборотов в минуту. Благодаря этому при наличии у ракеты угловой скорости крена возникает гироскопический момент, передаваемый со стороны маховика на тело элерона. Под действием гироскопического момента элерон отклоняется в таком направлении, что развиваемый им момент вокруг продольной оси ракеты уменьшает угловую скорость крена.

Выберем направления отсчета переменных. Как это отмечалось ранее, вектор положительной угловой скорости крена ω_x направлен в положительном направлении оси x_1, отклонение δ_1 левого элерона

вверх, а правого δ_2 вниз считается положительным. Из рис. 8.6 видно, что кинетический момент H маховика левого элерона направлен вверх, а кинетический момент маховика правого элерона — вниз.

Полагая, как всегда, входную величину ω_x положительной, видим, что гироскопические моменты $\Gamma = H\omega_x$ маховиков создают ускорения элеронов в направлении положительного отсчета δ_i ($i = 1, 2$). На элероны также действуют шарнирные моменты — $K_ш\delta_i$ и инерционные моменты от переносного движения (от вращения элеронов вместе с ракетой) — $m_э RL\dot{\omega}_x$, где $m_э$— масса элерона (вместе с маховиком); R, L — расстояние центра массы соответственно от продольной оси ракеты и от оси вращения элерона.

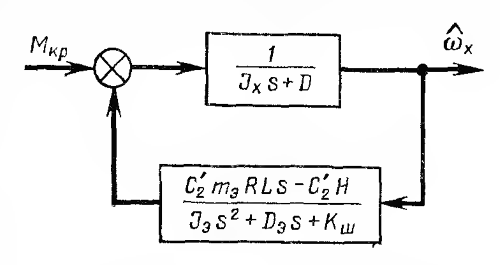


Рис. 8.7. Структурная схема «ракета — роллероны»

Если $J_э$—момент инерции элерона (вместе с маховиком) относительно его оси вращения, а $D_э$ — коэффициент вязкого трения, то уравнения движения элеронов

$$J_э\ddot{\delta}_1 + D_э\dot{\delta}_1 + K_ш\delta_1 = H\omega_x\cos\delta_1 - m_э RL\dot{\omega}_x; \tag{8.20а}$$

$$J_э\ddot{\delta}_2 + D_э\dot{\delta}_2 + K_ш\delta_2 = H\omega_x\cos\delta_2 - m_э RL\dot{\omega}_x. \tag{8.20б}$$

Здесь предполагается, что вращение ракеты не искажает воздушного потока, т. е. не влияет на величину шарнирного момента.

Вследствие тождественности уравнений (8.20 а, б) углы δ_1 и δ_2 одинаковы, так что при анализе можно пользоваться только одним уравнением, заменив в нем δ_1 (δ_2) через δ. Полагая $\cos\delta = 1$ (угол δ мал), имеем

$$J_э\ddot{\delta} + D_э\dot{\delta} + K_ш\delta = H\omega_x - m_э RL\dot{\omega}_x. \tag{8.21}$$

Рассматривая ракету как тело вращения, можно движение по крену описать уравнением

$$J_x\dot{\omega}_x + D\omega_x = -C_2'\delta + M_{кр}, \tag{8.22}$$

где J_x — момент инерции ракеты относительно продольной оси; $M_{кр}$ — внешний возмущающий момент, действующий вокруг продольной оси ракеты.

Структурная схема, составленная по уравнениям (8.21) и (8.22), показана на рис. 8.7. Из этой схемы видно, что по угловой скорости крена ω_x в отношении внешнего момента $M_{кр}$ осуществляется статическое регулирование, причем коэффициент статизма

$$C_0 = \left.\frac{\hat{\omega}_x}{\hat{M}_{кр}}\right|_{s=0} = \frac{K_ш}{DK_ш + C_2' H}. \tag{8.23}$$

Таким образом, роллероны не устраняют полностью угловую скорость крена ракеты, а лишь существенно уменьшают ее. Если бы маховки отсутствовали ($H = 0$), то $C_0 = 1/D$. При введении махови-

ков коэффициент статизма регулирования C_δ уменьшается в $1 + C_2'H/(DK_ш)$ раз.

Несмотря на статизм регулирования по ω_x в отношении $M_{кр}$, в уравнениях моментов относительно поперечных осей ракеты гироскопическими моментами $(J - J_x)\,\omega_x\omega_y$, $(J - J_x)\,\omega_x\omega_z$ можно пренебрегать, так как благодаря наличию роллеронов угловая скорость ω_x и, следовательно, гироскопические моменты невелики.

Для обеспечения большей точности самонаведения в некоторых случаях стремятся совсем ликвидировать перекрестные связи из-за ω_x. Это достигается введением в систему стабилизации свободного гироскопа крена, управляющего элеронами.

§ 8.7. КОНТУР САМОНАВЕДЕНИЯ

Пренебрегая влиянием силы веса ракеты, можно для плоского случая самонаведения записать уравнения ракеты в следующем виде — см. (1.7) ÷ (1.9):

$$m_0V\Omega = C_3\alpha; \tag{8.24 а}$$

$$J\dot{\omega} + D\omega + C_1\alpha = -C_2\delta; \tag{8.24 б}$$

$$\omega = \Omega + \dot{\alpha}. \tag{8.24 в}$$

Автопилот, отклоняющий рули, служит, с одной стороны, для демпфирования свободных колебаний ракеты вокруг ее поперечных осей y_1, z_1, а с другой, — для управления ракетой вокруг этих осей. По сравнению с самолетным автопилотом или даже с автопилотом телеуправляемой ракеты автопилот самонаводящейся ракеты значительно проще. Он состоит, по существу, из одного ДУСа и рулевой машинки. Такого рода автопилоты в авиации принято называть демпферами колебаний.

При отсутствии корректирующих контуров идеальный (безынерционный) автопилот описывается следующим уравнением:

$$\delta = a_1\omega + K\Delta. \tag{8.25}$$

Сигнал $a_1\omega$, снимаемый с установленного на ракете ДУСа, служит для упомянутого выше демпфирования (если подставить (8.25) в (8.24 б), то легко видеть, что коэффициент демпфирования возрастает до значения $D + a_1$). Поступающий от гиростабилизированного координатора цели сигнал $K\Delta$ обеспечивает осуществление ракетой метода пропорциональной навигации.

С целью упрощения задачи систему автосопровождения будем считать безынерционной, т. е. будет полагать $W(D) = K_0$. Уравнение автосопровождения (8.19) принимает тогда вид

$$T_a\dot{\Delta} + \Delta = \nu/K_0, \tag{8.26}$$

где $T_a = 1/K_0$.

При высоком коэффициенте усиления K_0 цепи, связывающей угол рассогласования Δ со скоростью прецессии (что здесь и предполагается), постоянная времени T_a пренебрежимо мала, так что уравнение (8.26) сводится к соотношению $\Delta \approx \nu/K_0$. Подставляя это соотно-

шение в (8.25) и учитывая все указанные упрощения, получим для плоской системы самонаведения следующую систему уравнений:

$$m_0 V\Omega = C_3\alpha; \quad (8.27\ \text{а})$$

$$J\dot{\omega} + D\omega + C_1\alpha = -C_2\delta; \quad (8.27\ \text{б})$$

$$\omega = \Omega + \dot{\alpha}; \quad (8.27\ \text{в})$$

$$\delta = a_1\omega - b_0\nu; \quad (8.27\ \text{г})$$

$$T_\text{к}\dot{\nu} - \nu + q\Omega = S, \quad (8.27\ \text{д})$$

где $b_0 = K/K_0$.

Характерная особенность системы уравнений (8.27) заключается в том, что эти уравнения не содержат углов, определяющих положение корпуса ракеты и линии визирования относительно неподвижной системы координат (в уравнения входят только угловые скорости). Это еще раз показывает независимость процесса самонаведения от положения ракеты и цели относительно неподвижной системы координат (при условии пренебрежения силой веса).

Считая, что коэффициент $T_\text{к}$ в уравнении кинематики (8.11) «заморожен», можно на основании указанной системы уравнений составить структурную схему плоской системы самонаведения (рис. 8.8). На этой схеме параметры T_1, T_1', ζ_1 и $K_{об} = K_1K_2$ звена *1*, соответствующего ракете, выражаются через исходные параметры J, D, C_1, C_2 формулами (1.13).

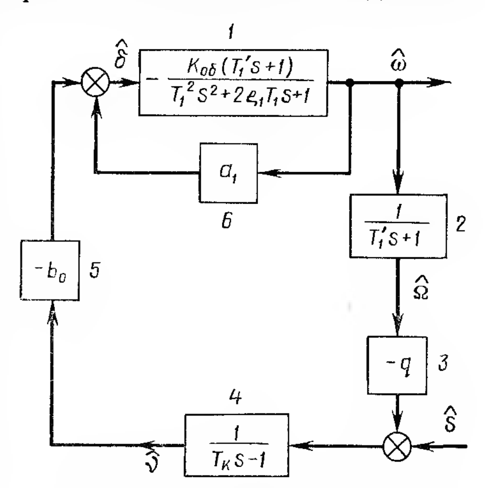


Рис. 8.8. Система самонаведения в плоскости

Как видно из рис. 8.8, система самонаведения представляет собой замкнутую систему автоматического регулирования, содержащую два контура. Контур из звеньев *1*, *6* соответствует системе стабилизации ракеты относительно центра масс (контур демпфера колебаний), а контур из звеньев *1*, *2*, *3*, *4*, *5* — системе самонаведения, осуществляемого по методу пропорциональной навигации. Этот последний контур называется контуром самонаведения. Как и в телеуправляемых ракетах, часто вводится обратная связь по нормальной перегрузке, благодаря которой образуется третий контур. Назначение этого контура и выбор его параметров рассмотрены в § 7.1.

Выбором параметра настройки a_1 можно придать корням внутреннего контура любое желаемое демпфирование, например, сделать этот контур колебательным звеном с относительным коэффициентом демпфирования $\zeta = 0{,}7$. Если затем построить логарифмический корневой годограф внешнего контура, то можно видеть, что

устойчивость замкнутой системы имеет место только, начиная с минимально допустимого значения $K_{min} = 1$ коэффициента усиления по контуру (рис. 8.9). Неустойчивость контура самонаведения при малых значениях коэффициента усиления обусловлена наличием в этом контуре неустойчивого апериодического звена *4*.

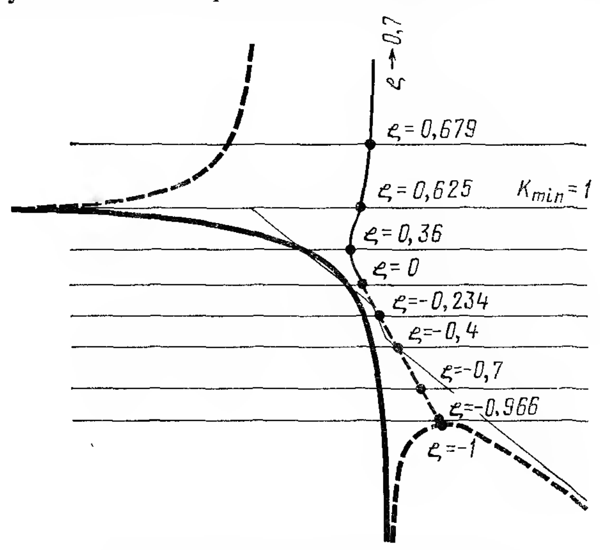


Рис. 8.9. Логарифмический корневой годограф плоского контура самонаведения

Указанный анализ произведен при «замороженном» значении в действительности переменного параметра $T_к$ и его результаты нельзя рассматривать как достоверные. В следующем разделе производится интегрирование уравнений контура самонаведения при учете переменности $T_к$.

§ 8.8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КОНТУРА САМОНАВЕДЕНИЯ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В § 8.2 доказано, что кинематика самонаведения, осуществляемого в одной плоскости по методу пропорциональной навигации, описывается уравнением

$$T_к \dot{\nu} - \nu + q\Omega = S. \qquad (8.28)$$

Параметр $T_к$ является функцией дальности r ракеты до преследуемой цели. Если принять, что дальность сокращается по линейному закону, то согласно (8.12)

$$T_к = r/(2|\dot{r}|) = (r_0 - vt)/(2v) = (1 - at)/b; \quad b/a = 2, \qquad (8.29)$$

где $v = |\dot{r}|$ — скорость сближения. Параметр q будем считать постоянной величиной.

Зависимость угловой скорости Ω касательной к траектории ракеты от угловой скорости линии визирования ν устанавливается системой уравнений (8.27 а, б, в, г), имеющей второй порядок. Ради простоты собственными колебаниями ракеты относительно центра масс будем пренебрегать, т. е. будем считать $J = 0$. Тогда указанная система уравнений сводится к одному уравнению первого порядка

$$T\dot{\Omega} + \Omega = k\nu, \tag{8.30}$$

где

$$\left.\begin{aligned} T &= m_0 V (D + C_2 a_1)/(m_0 V C_1 + DC_3 + C_2 C_3 a_1); \\ k &= C_2 C_3 b_0/(m_0 V C_1 + DC_3 + C_2 C_3 a_1). \end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

Постоянная времени T, определяемая выражением (8.31), значительно меньше единицы и может рассматриваться в качестве малого параметра.

Произведем сначала интегрирование однородной системы, т. е. будем полагать $S = 0$. Объединяя уравнения (8.28) и (8.30) в одно, находим

$$T\frac{1-at}{b}\ddot{\nu} + \left[\frac{1-at}{b} - T\left(1 + \frac{a}{b}\right)\right]\dot{\nu} + (qk-1)\nu = 0. \tag{8.32}$$

Уравнение (8.32) имеет особую точку $t = 1/a$, т. е. точку, в которой коэффициент при старшей производной обращается в нуль. Эта особая точка является регулярной, так как после деления уравнения на коэффициент при старшей производной знаменатель коэффициента при $\dot{\nu}$ содержит множитель $1 - at$ в степени не выше первой, а знаменатель коэффициента при ν — этот множитель в степени не выше второй, что и является признаком регулярности особой точки. Уравнение можно интегрировать в этом случае на всем интервале, включая окрестность особой точки, методом степенных рядов. Однако эти ряды сходятся слишком медленно.

Поскольку уравнение (8.32) содержит малый параметр T и при $T = 0$ интегрируется в квадратурах, интегрирование этого уравнения целесообразно производить способом, изложенным в § 5.6. А именно, решение ищется в форме функционального ряда по степеням параметра T. Следуя этому способу, имеем

$$\nu = \nu_0 + T\nu_1 + T^2\nu_2 + \ldots . \tag{8.33}$$

Переносим члены уравнения (8.32), зависящие от параметра T, в правую часть, подставляем в уравнение ряд (8.33) и приравниваем коэффициенты левой и правой частей при одинаковых степенях T. В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений с одинаковыми левыми частями:

$$\frac{1-at}{b}\dot{\nu}_0 + (qk-1)\nu_0 = 0; \tag{8.34а}$$

$$\frac{1-at}{b}\dot{\nu}_1 + (qk-1)\nu_1 = -\frac{1-at}{b}\ddot{\nu}_0 + \left(1 + \frac{a}{b}\right)\dot{\nu}_0; \tag{8.34б}$$

$$\frac{1-at}{b}\dot{v}_2+(qk-1)v_2=-\frac{1-at}{b}\ddot{v}_1+\left(1+\frac{a}{b}\right)\dot{v}_1; \qquad (8.34в)$$

. . . .

Примем пока для уравнения (8.32) следующие начальные условия

$$v(0)=1, \quad \dot{v}(0)=\mathrm{const}. \qquad (8.35)$$

Начальные условия для уравнений (8.34) должны быть совместимы с начальными условиями (8.35). Имея это в виду, примем в качестве начального условия для уравнения (8.34 а) —

$$v_0(0)=1 \qquad (8.36)$$

для уравнения (8.34 б) —

$$v_1(0)=0, \qquad (8.37)$$

для уравнения (8.34 в) —

$$v_2(0)=0 \qquad (8.38)$$

и т. д.

Дифференциальное уравнение (8.34 а) относится к уравнениям с разделяющимися переменными. Интегрируя это уравнение при начальном условии (8.36) получаем

$$v_0=(1-at)^{b(qk-1)/a}. \qquad (8.39)$$

Подстановка найденного решения в правую часть уравнения (8.34 б) обращает ее в известную функцию времени $u(t)$:

$$u(t)=-bqk(qk-1)(1-at)^{b(qk-1)/a-1}. \qquad (8.40)$$

Произведем теперь интегрирование неоднородного уравнения (8.34 б). Решение неоднородного уравнения первого порядка с коэффициентом при первой производной, равным единице*, выражается через решение $v_{10}(t)$ однородного уравнения следующей формулой:

$$v_1(t)=v_1(0)v_{10}(t)+v_{10}(t)\int_0^t v_{10}^{-1}(\tau)\frac{bu(\tau)}{1-a\tau}d\tau. \qquad (8.41)$$

Вследствие одинаковости левых частей всех уравнений решение $v_{10}(t)$ однородного уравнения, соответствующего (8.34 б), как и решение уравнения (8.34 а), определяется выражением (8.39).

Принимая во внимание начальное условие (8.37), в качестве решения уравнения (8.34 б) получим

$$v_1(t)=(1-at)^{b(qk-1)/a}\int_0^t(1-a\tau)^{-b(qk-1)/a}\frac{bu(\tau)}{1-a\tau}d\tau$$

или после подстановки выражения (8.40) и интегрирования

$$v_1(t)=\frac{b^2}{a}qk(qk-1)\left[(1-at)^{b(qk-1)/a}-(1-at)^{b(qk-1)/a-1}\right]. \qquad (8.42)$$

* В этом случае правая часть уравнения (8.34 б) принимает вид $bu(t)/(1-at)$.

Если ограничиться учетом лишь двух членов функционального ряда (8.33), то решение уравнения (8.32) согласно (8.39) и (8.42) принимает вид:

$$\nu_{\text{I}}(t) = (1-at)^{b(qk-1)/a} + T\frac{b^2}{a}qk(qk-1) \times$$
$$\times \left[(1-at)^{b(qk-1)/a} - (1-at)^{b(qk-1)/a-1}\right]. \qquad (8.43)$$

Подставив это решение в (8.32), убеждаемся, что невязку образуют лишь члены, содержащие в качестве множителя малый параметр T в степени, не ниже второй. Как будет далее показано, решение (8.43) можно рассматривать в качестве базисного.

Так как исследуемое уравнение (8.32) имеет второй порядок, помимо решения (8.43) существует второе базисное решение $\nu_{\text{II}}(t)$. Это решение можно найти, понизив при использовании известного базисного решения $\nu_{\text{I}}(t)$ порядок дифференциального уравнения (8.32) на единицу. Делая в уравнении (8.32) замену переменной

$$\nu = \nu_{\text{I}} z, \qquad (8.44)$$

и учитывая выражение (8.43), находим следующее дифференциальное уравнение в отношении z:

$$\ddot{z} + [1/T - (2qkb + a - b)/(1-at)]\,\dot{z} = 0.$$

Производя интегрирование и подставляя результат в (8.44), находим второе решение в следующем виде:

$$\nu_{\text{II}}(t) = (1-at)^{b(qk-1)/a}\int\limits_0^t e^{-\tau/T}(1-a\tau)^{-(2qkb+a-b)/a}\,d\tau. \qquad (8.45)$$

Подстановка этого решения в (8.32) показывает, что невязка образуется лишь за счет членов, содержащих множителем параметр T в степени, не ниже второй.

Решения (8.43) и (8.45) представляют собой линейно независимые функции и, следовательно, являются базисными. Таким образом, с точностью до членов порядка малости T решение уравнения (8.32) выражается как

$$\nu(t) = C_1\nu_{\text{I}}(t) + C_2\nu_{\text{II}}(t), \qquad (8.46)$$

где $\nu_{\text{I}}(t)$, $\nu_{\text{II}}(t)$ определяются формулами (8.43), (8.45).

Постоянные интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий. Например, при начальных условиях $\nu(0) = \nu_{\text{н}}$, $\dot{\nu}(0) = \dot{\nu}_{\text{н}}$ получим, полагая в решении (8.46) и его первой производной $t = 0$

$$\nu_{\text{н}} = C_1;\quad \dot{\nu}_{\text{н}} = -b(qk-1)(1 + Tb\,qk)C_1 + C_2. \qquad (8.47)$$

Отсюда находим

$$C_1 = \nu_{\text{н}};\quad C_2 = \dot{\nu}_{\text{н}} + b(qk-1)(1 + Tb\,qk)\nu_{\text{н}}. \qquad (8.48)$$

Возможность выражения постоянных C_1, C_2 через начальные условия $\nu_н$, $\dot{\nu}_н$ является следствием того, что $\nu_I(t)$ и $\nu_{II}(t)$ — базисные решения.

Частное решение системы, соответствующее внешнему воздействию S, можно найти при помощи рассматриваемой в следующем параграфе импульсной переходной функции $k(t, \tau)$.

При использовании метода малого параметра здесь встретилась особенность, не рассматривавшаяся ранее. Эта особенность заключается в том, что малый параметр входит множителем в коэффициент дифференциального уравнения при старшей производной. Как здесь показано, возникающие из-за этого трудности (понижение порядка дифференциального уравнения при обращении в нуль малого параметра) могут быть преодолены.

Если в подынтегральном выражении (8.45) базисного решения $\nu_{II}(t)$ показатель степени бинома целое число, то интеграл можно вычислить, используя интегральную экспоненциальную функцию. Однако такой подход не позволяет распространить метод на уравнения третьего и более высокого порядков. Решение этих уравнений в аналитической форме становится возможным только при исключении из рассмотрения особой точки $t_в = 1/a$. Например, аппроксимируя подынтегральное выражение (8.45) на интервале 0, $t_к$ суммой экспонент ($t_к < t_в$), можно получить решение на этом интервале, выраженное через элементарные функции. При указанной аппроксимации изложенный здесь метод интегрирования можно применить к дифференциальному уравнению процесса самонаведения третьего порядка, получающемуся при учете инерционности ракеты ($J \neq 0$). В качестве нулевого приближения следует использовать тогда решение (8.46) уравнения второго порядка, к которому сводится уравнение третьего порядка при $J = 0$. Процесс распространения предложенного метода интегрирования на системы самонаведения более высокого порядка можно продолжить. Кроме этого, преимущества, большим достоинством метода является то, что решение получается в аналитической форме, причем его точность всегда может быть оценена.

§ 8.9. УСЛОВИЕ ОСУЩЕСТВИМОСТИ ПРОЦЕССА САМОНАВЕДЕНИЯ

Базисные решения (8.43), (8.45) позволяют найти условия, от которых зависит протекание процесса самонаведения. Например, решение (8.43) показывает, что переходный процесс по угловой скорости ν линии визирования сходится лишь при условии

$$\frac{b}{a}(qk-1)-1>0. \qquad (8.49)$$

С учетом $b/a = 2$ получаем из (8.49) следующее ограничение снизу для параметра k, называемого *постоянной навигации*

$$k > 3/(2q). \qquad (8.50)$$

Однако неравенство (8.50) гарантирует затухание лишь первого базисного решения ($v_I(t) \to 0$). Второе базисное решение (8.45) показывает, что при $T \neq 0$ условие $\lim_{t \to 1/a} v_{II}(t) = 0$ выполняется при соблюдении неравенства

$$k < 1/(4q). \tag{8.51}$$

Это неравенство несовместимо с (8.50). Отсюда следует, что при $t \to 1/a$, где момент $t_в = 1/a$ соответствует встрече ракеты с целью в идеализированном случае*, угловая скорость линии визирования при любом значении постоянной навигации k стремится к бесконечности. Поскольку в уравнении (8.32), описывающем систему «ракета—автопилот», постоянная времени T всегда отлична от нуля, приходим к выводу, что при $t \to 1/a$ процесс самонаведения всегда расходится.

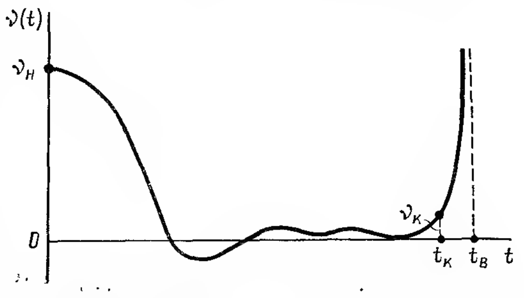


Рис. 8.10. Переходный процесс в системе самонаведения

Однако из расходимости процесса самонаведения в окрестности особой точки $t_в = 1/a$ еще не следует вывод о невозможности процесса самонаведения. Дело в том, что начальная и серединная части переходного процесса по угловой скорости линии визирования v имеют тенденцию к затуханию и лишь непосредственно перед моментом $t_в = 1/a$ процесс резко расходится (рис. 8.10). Если учесть, что на некоторой отличной от нуля дистанции до цели происходит «ослепление» координатора цели и, следовательно, размыкание контура самонаведения, то можно видеть, что указанная расходимость процесса $v(t)$ не исключает возможности поражения цели: начиная с момента $t_к$ ослепления координатора, ракета движется как неуправляемое тело и промах зависит от угловой скорости линии визирования $v_к$ в этот момент ослепления, которая может быть достаточно малой (см. рис. 8.10).

Промах h, т. е. минимальное растояние, возникающее между ракетой и целью в процессе самонаведения, определяется формулой [11]

$$h \approx r_к^2 v_к / |\dot{r}|, \tag{8.52}$$

где $r_к$ — дистанция ракеты до цели в момент ослепления координатора; $|\dot{r}|$ — скорость сближения.

Входящая в (8.52) угловая скорость $v_к$ тем меньше, чем быстрее затухает базисное решение $v_I(t)$. Следовательно, для реальных систем самонаведения выполнение условия (8.50) является обязательным. Поэтому неравенство (8.50) можно назвать условием осуществимости процесса самонаведения.

* Имеется в виду случай, когда в процессе самонаведения линия визирования совершает поступательное движение, т. е. $v = 0$.

§ 8.10. ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ СИСТЕМЫ САМОНАВЕДЕНИЯ

Базисные решения, если они известны, позволяют определить любые характеристики соответствующей системы, например, импульсную переходную и параметрическую передаточную функции [13].

Соотношение между импульсной переходной функцией и параметрической передаточной функцией. Импульсной переходной функцией k называется реакция системы на единичное импульсное воздействие $\delta(t-\tau)$, прикладываемое при нулевых начальных условиях. Поэтому рассмотрим прежде функцию $\delta(t-\tau)$.

Единичная импульсная функция — это функция, имеющая следующие свойства:

$$\delta(t-\tau)=\infty \quad \text{при} \quad t=\tau; \tag{8.53а}$$

$$\delta(t-\tau)=0 \quad \text{при} \quad t\neq\tau; \tag{8.53б}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,dt=1; \tag{8.53в}$$

$$(-1)^k\frac{d^k f(\tau)}{d\tau^k}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta_t^{(k)}(t-\tau)\,dt; \tag{8.53г}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt=f(\tau). \tag{8.53д}$$

Для всех значений аргумента $t-\tau$, за исключением нулевого значения $t-\tau=0$, функция $\delta(t-\tau)$ равна нулю, а в момент $t=\tau$ она обращается в бесконечность (8.53а, б). Величина импульсной функции характеризуется площадью под кривой этой функции и если площадь равна единице, то импульсная функция называется единичной и обозначается δ (8.53 в). Интеграл от произведения некоторой функции $f(t)$ на k-ю производную по времени t от единичной импульсной функции $\delta_t^{(k)}(t-\tau)$* равен k-й производной функции f в момент $t=\tau$, взятой со знаком $(-1)^k$ — (8.53г). Из этой формулы как частный случай вытекает, что интеграл от произведения некоторой функции $f(t)$ на единичную импульсную функцию $\delta(t-\tau)$ равен значению функции $f(t)$ в момент $t=\tau$ возникновения единичной импульсной функции (8.53д).

Импульсное воздействие можно представить себе как прямоугольный импульс с бесконечно малой шириной dt. Величина импульсного воздействия равна площади S указанного импульса, и если $S=1$, то импульс единичный и обозначается как δ (рис. 8.11). Если площадь равна некоторой отличной от единицы величине S, то импульсное воздействие выражается произведением S на единичную импульсную функцию, т. е. $S\delta(t-\tau)$. Тогда можно любую функцию

* Нижний индекс t означает дифференцирование функции δ по t.

$x(t)$ представить как серию импульсов величиной $S_i = x(t)\,dt$ (рис. 8.12).

Изображение по Лапласу единичной импульсной функции определяется, согласно (8.53д), выражением

$$\hat{\delta}_\tau(s) = \int\limits_0^\infty \delta(t-\tau)\,e^{-st}\,dt = e^{-s\tau}.$$

Как показывает это выражение, для единичной импульсной функции $\delta(t)$, существующей в момент $t = \tau = 0$, изображение по Лапласу равно единице, $\delta_{\tau=0} = 1$. Учитывая это, а также данное выше определение импульсной переходной функции k, приходим к выводу, что для стационарной системы изображение по Лапласу этой функции равно передаточной функции $W(s)$ системы, т. е.

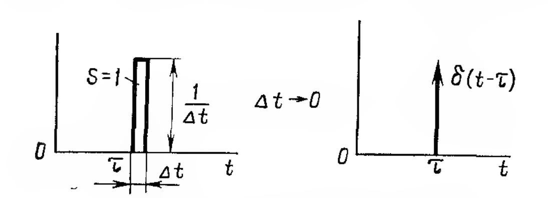


Рис. 8.11. Единичный импульс $\delta(t-\tau)$ как результат предельного перехода $\Delta t \to 0$

Рис. 8.12. Представление входного сигнала в виде серии импульсов

$$L[k(t)] = W(s). \tag{8.54}$$

Таким образом, подобно передаточной функции $W(s)$, импульсная переходная функция $k(t)$ стационарной системы несет в себе исчерпывающую информацию об этой системе. То же самое можно сказать и о линейной нестационарной системе: импульсная переходная функция k нестационарной системы является исчерпывающей характеристикой этой системы.

Так как стационарная система во времени не изменяется, график импульсной переходной функции $k(t)$ один и тот же, независимо от момента τ появления единичного импульсного воздействия $\delta(t-\tau)$, возбудившего эту функцию. Ординаты графика k зависят только от «возраста» импульсной функции, т. е. от разности $t-\tau$, где t — момент наблюдения, τ — момент возникновения импульсной переходной функции k ($t > \tau$). Поэтому можно написать $k(t-\tau)$.

Нестационарная линейная система изменяется во времени, так что графики импульсных переходных функций k, возбужденных в различные моменты времени τ_1 и τ_2 одним и тем же импульсным воздействием δ, по своей форме различны. Следовательно, импульсная переходная функция нестационарной системы представляет собой некоторую функцию аргументов t и τ, т. е. $k(t, \tau)$, где τ — момент приложения единичного импульса, t — момент наблюдения импульсной переходной функции ($t \geqslant \tau$).

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ соответственно входной и выходной сигналы ли-

нейной системы. Будем трактовать входной сигнал (возможность такой трактовки отмечалось выше) как последовательность кратковременных импульсов. Величина отдельного импульса равна его площади (рис. 8.12), т. е. произведению $x(t)\,dt$.

Реакция на выходе некоторой линейной системы при подаче на ее вход единичного импульса δ равна импульсной переходной функции k. Реакция на импульс с величиной $x(\tau)\,d\tau$, прикладываемый на входе в момент τ, в силу линейности системы будет

$$k_1(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \qquad (8.55)$$

если система стационарна, и выражением

$$k(t,\ \tau)\,x(\tau)\,d\tau, \qquad (8.56)$$

если система нестационарна (рис. 8.13).

Вследствие справедливости для линейных систем (как стационарных, так и нестационарных) принципа суперпозиции реакция системы $y(t)$ в момент t, обусловливаемая действием всех импульсов $x(\tau)\,d\tau$, заполняющих интервал от $\tau=0$ до $\tau=t$, для стационарных систем

$$y(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum k_1(t-\tau_i)\,x(\tau_i)\,\Delta\tau=\int_0^t k_1(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \qquad (8.57)$$

для нестационарных систем

$$y(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum k(t,\tau_i)\,\Delta\tau=\int_0^t k(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \qquad (8.58)$$

где k_1, k — импульсные переходные функции соответственно стационарной и нестационарной системы (см. рис. 8.13).

Рассматривая τ как переменную с тем же началом и направлением отсчета, что и у t, видим, что при фиксированном t график функции $k_1(t-\tau)$, фигурирующей в подынтегральном выражении (8.57), получается построением графика k_1 от рассматриваемого момента t назад, т. е. справа налево (рис. 8.14). Таким образом, трактовка времени τ приложения импульса в качестве переменной (при фиксированном t) приводит к «обращенной» импульсной переходной функции. Эта функция выполняет в (8.57) роль весового множителя, т. е. множителя, оценивающего степень влияния различных импульсов $x(\tau)\,d\tau$, заполняющих интервал $0\leqslant\tau\leqslant t$, на значение выходной величины $y(t)$ в конце указанного интервала (см. рис. 8.14).

Оставляя пока в стороне вопрос об определении импульсной переходной функции $k(t,\ \tau)$ нестационарной системы, обратимся к понятию параметрической передаточной функции этой системы. Согласно (8.54), передаточная функция $W(s)$ стационарной системы равна изображению по Лапласу импульсной переходной функции $k_1(t)$ этой системы. Импульсную переходную функцию $k_1(t)$ можно получить из ядра $k_1(t-\tau)$ интеграла (8.57), производя в этом ядре замену переменной $t-\tau=u$, эквивалентную замене

$$\tau=t-u. \qquad (8.59)$$

После этой замены в выражениях (8.59), (8.57) время t следует

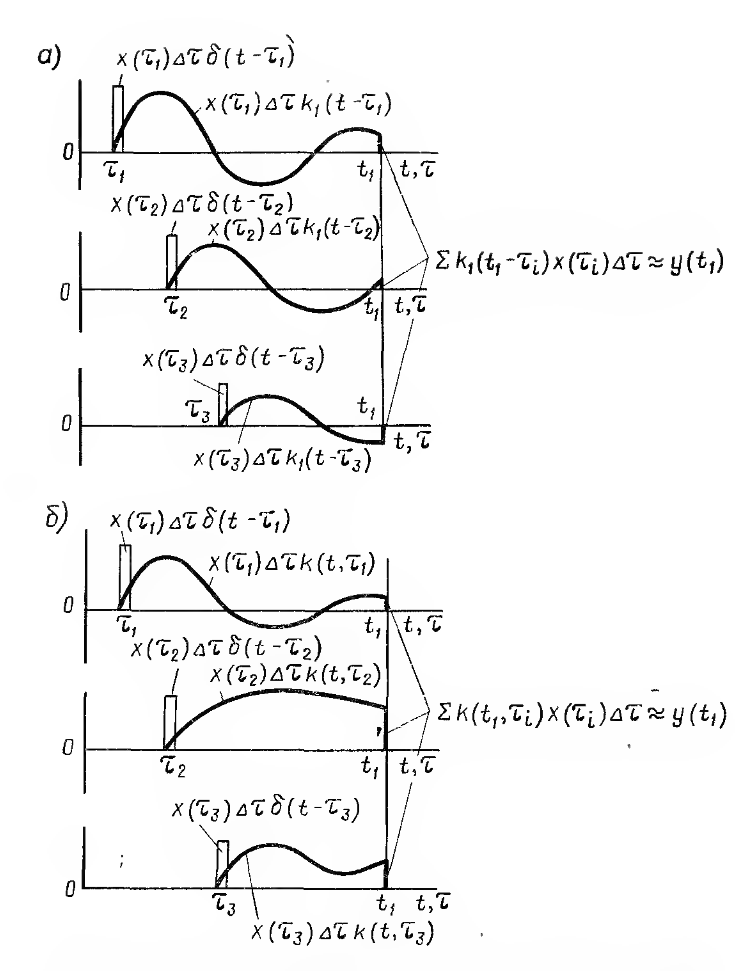


Рис. 8.13. Реакция на выходе в момент t_1 как сумма реакций на импульсы, заполняющие интервал $0 \leqslant t \leqslant t_1$, (*а*) — стационарная система, (*б*) — нестационарная система

рассматривать как параметр (t — момент времени, для которого вычисляется реакция $y(t)$, а u — как переменную, характеризующую «возраст» импульсной переходной функции k_1, т. е. время, прошедшее с момента τ ее возбуждения. Введем для ядра интеграла (8.57) обозначение: $k_1(t-\tau) = k(t, \tau)$. После замены, согласно (8.59), это соотношение принимает вид

$$k_1(u) = k(t, \; t-u), \tag{8.60}$$

где $k_1(u)$ — «прямая» импульсная переходная функция.

Преобразуя (8.60) по Лапласу в отношении u, получим передаточную функцию стационарной системы

$$W(s) = \int_0^\infty k_1(u)\, e^{-su}\, du = \int_0^\infty k(t, t-u)\, e^{-su}\, du.$$

Как это видно из (8.60), в случае стационарных систем функция $k(t, t-u)$ (а следовательно, и $W(s)$) от t фактически не зависит.

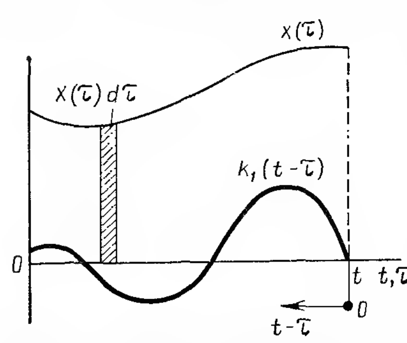


Рис. 8.14. График обращенной импульсной переходной функции ($t=$ $=\text{const}$, $\tau=\text{var}$)

Произведем теперь сравнение выражений (8.57) и (8.58). С точки зрения создания значения $y(t)$ импульсная переходная функция $k(t, \tau)$ нестационарной системы выполняет ту же роль, что и функция $k_1(t-\tau)$ в случае стационарной системы. Отсюда следует возможность замены для фиксированного момента t нестационарной системы эквивалентной ей стационарной системой.

Чтобы произвести эту замену, необходимо подобрать такую импульсную переходную функцию k_1 стационарной системы, чтобы для рассматриваемого фиксированного момента t выполнялось условие

$$k_1(t-\tau) = k(t, \tau), \tag{8.61}$$

где $k(t, \tau)$ импульсная переходная функция нестационарной системы.

Производя в (8.61) замену переменной τ согласно формуле (8.59), находим, что импульсная переходная функция k_1 стационарной системы, заменяющей для момента t нестационарную систему, определяется выражением

$$k_1(u) = k(t, t-u). \tag{8.62}$$

Импульсная переходная функция $k(t, \tau)$ нестационарной системы предполагается здесь известной. Поскольку при различных значениях параметра t функция $k(t, \tau)$ в отношении переменной τ и, следовательно, переменной u протекает по-разному (кривые, получающиеся в сечениях поверхности $k(t, \tau)$ плоскостями, параллельными плоскости k, τ, имеют различный вид (см. рис. 8.15), вид функции $k_1(u)$ для различных значений t также не одинаков. Эта неодинаковость учитывается тем, что функция $k(t, \tau)$, справедливая для всех значений t, зависит не только от u (как в случае стационарной системы), но и от t.

Переходя от функции $k(t, \tau)$ к функции (8.62) и строя в отношении u изображение по Лапласу (t рассматривается как постоянный параметр), получим передаточную функцию $W(s, t)$ стационарной системы, заменяющей для произвольного фиксированного момента t исходную нестационарную систему. В выражении функции $W(s, t)$ время t фигурирует в качестве параметра, что послужило поводом называть эту функцию параметрической передаточной функцией.

Параметрическая передаточная функция позволяет все разработанные применительно к линейным стационарным системам методы исследования использовать для расчетов нестационарной системы, относящихся к некоторому моменту времени t_1. В выражении $W(s, t)$ необходимо просто положить параметр $t = t_1 = \text{const}$ и рассматривать $W(s, t_1)$ как обычную передаточную функцию стационарной системы.

Однако результаты расчета характеризуют исследуемую нестационарную систему только в единственный момент $t=t_1$. Если, например, используя передаточную функцию $W(s, t_1)$, построить реакцию $y(t)$ системы на какой либо входной сигнал (например, по методу трапецеидальных частотных характеристик), то из всех ординат этой реакции ординатой действительного переходного процесса нестационарной системы будет только ордината $y(t_1)$.

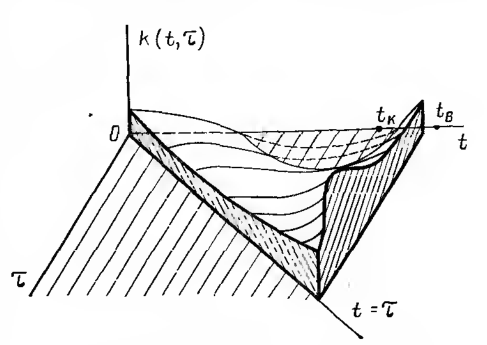


Рис. 8.15. Импульсная переходная функция нестационарной системы

Впервые понятие параметрической передаточной функции нестационарной линейной системы было введено в начале 50-х годов Л. Заде*. Применения этой функции достаточно многообразны. Подставляя в параметрическую передаточную функцию вместо t фиксированные значения t_1, t_2, ..., можно для этих значений найти, как указано выше, ординаты реакции нестационарной системы на любой входной сигнал. Если нестационарная система устойчива и время ее работы столь велико, что за это время импульсная переходная функция $k(t_k, t_k - u)$ затухает, то параметрическая передаточная функция может быть использована для оценки среднеквадратического значения ошибки системы при действии на нее стационарных случайных возмущений. При этом применяется известная для стационарных систем формула, дающая результат для установившегося состояния:

$$\overline{y^2(t_k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(t_k, j\omega)|^2 S(\omega)\, d\omega, \qquad (8.63)$$

где $\overline{y^2(t_k)}$ — среднее значение квадрата случайной ошибки нестационарной системы в момент $t = t_k$, вызываемой стационарным случайным воздействием со спектральной плотностью мощности $S(\omega)$; $W(t_k, j\omega)$ — параметрическая передаточная функция системы, связывающая случайное воздействие с ошибкой y.

Определение импульсной переходной функции нестационарной системы. Рассмотрим способ определения импульсной переходной функции $k(t, \tau)$ нестационарной системы по известным базисным решениям этой системы. Пусть система описывается уравнением

$$a_0(t)\, x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = F(t). \qquad (8.64)$$

Как уже отмечалось, импульсная переходная функция — это

* Подход, примененный Л. Заде при выводе параметрической передаточной функции, отличается от изложенного выше. Однако окончательные результаты обоих подходов получаются одинаковыми.

реакция системы, возбуждаемая при нулевых начальных условиях воздействием $F(t) = \delta(t - \tau)$. Докажем, что эта реакция может быть получена также в результате решения однородного уравнения, соответствующего (8.64), при следующих начальных условиях: для $t = \tau$

$$\left.\begin{aligned} x(\tau) = 0; \quad \dot{x}\big|_{t=\tau} = 0, \ \ldots, \\ x^{(n-2)}\big|_{t=\tau} = 0; \ x^{(n-1)}\big|_{t=\tau} = 1/a_0(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{8.65}$$

где τ — момент приложения единичного импульса $\delta(t - \tau)$.

В предположении нулевых начальных условий проинтегрируем неоднородное уравнение

$$a_0(t)\, x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = \delta(t - \tau) \tag{8.66}$$

на малом интервале τ^-, $\tau^- + \Delta t$. На этом интервале коэффициенты $a_i(t)$ можно рассматривать как постоянные величины $a_i(\tau)$. Следовательно, после интегрирования имеем:

$$a_0(\tau)\, x^{(n-1)}\Big|_{\tau^-}^{\tau^- + \Delta t} + a_1(\tau)\, x^{(n-2)}\Big|_{\tau^-}^{\tau^- + \Delta t} + \ldots = 1. \tag{8.67}$$

Импульс δ возбуждает систему (8.66) по высшей производной. Действительно, на малом интервале Δt нестационарная система рассматривается как стационарная. Согласно известной из операционного исчисления теореме о начальном значении оригинала имеем для стационарной системы вида (8.66):

$$x(0) = [sX(s)]_{s=\infty} = [s\Phi(s)\, \hat{\delta}(s)]_{s=\infty} =$$

$$= \left[s \frac{1}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}\, 1 \right]_{s=\infty} = 0;$$

$$\dot{x}(0) = [ssX(s)]_{s=\infty} = \left[\frac{s^2}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_0} \right]_{s=\infty} = 0;$$

. . . .

$$x^{(n-2)}(0) = [ss^{n-2} X(s)]_{s=\infty} = \left[\frac{s^{n-1}}{a_0 s^n + a_1 s n^{-1} + \ldots + a^n} \right]_{s=\infty} = 0;$$

$$x^{(n-1)}(0) = [ss^{n-1} X(s)]_{s=\infty} = \left[\frac{s^n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} \right]_{s=\infty} = \frac{1}{a_0}.$$

Учитывая, что в момент τ^-, соответствующий началу приложения импульса, все производные, в том числе и высшая, равны нулю, из уравнения (8.67) при $\Delta t \to 0$ находим

$$x^{(n-1)}\big|_{t=\tau} = 1/a_0(\tau), \tag{8.68}$$

где τ — момент, соответствующий окончанию импульса (разделение моментов τ^- и τ следует рассматривать как условное, так как вследствие бесконечно малой ширины импульса $\tau^- = \tau$). Производные $x^{(n-2)}$, $x^{(n-3)}$, ..., $\dot{x}$ и сам сигнал x в указанный момент τ равны нулю. Поскольку в этот момент импульса δ уже не существует, приходи

к выводу, что система описывается однородным уравнением и ее состояние характеризуется условиями (8.65). Решение данного однородного уравнения при начальных условиях (8.65) и решение неоднородного уравнения (8.66) совпадают, что и доказывает сформулированное выше положение.

В отличие от рассматриваемого ниже общего случая импульсная переходная функция системы (8.66) обозначается как $g(t, \tau)$ и называется функцией Грина. Функция Грина $g(t, \tau)$, рассматриваемая в теории дифференциальных уравнений, несколько отличается от импульсной переходной функции, так как определена для всех значений t, а импульсная переходная функция для $t < \tau$ тождественно равна нулю. При $t \geqslant \tau$ обе эти функции совпадают. В дальнейшем функция $g(t, \tau)$ трактуется только как импульсная переходная функция, хотя и называется иногда функцией Грина. Как было показано раньше [разбиение графика $F(t)$ на узкие вертикальные полоски и трактовка этих полосок как импульсных функций $F(\tau)\,d\tau\delta(t-\tau)$], реакция системы (8.64) на внешнее возмущение $F(t)$ определяется формулой (8.58), принимающей в данном случае вид

$$x(t) = \int_0^t g(t, \tau) F(\tau)\,d\tau. \tag{8.69}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда система описывается дифференциальным уравнением

$$a_0(t)\,x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,x = b_0(t)\,f^{(m)}(t) + b_1(t)\,f^{(m-1)}(t) + \\ + \ldots + b_m(t)\,f(t). \tag{8.70}$$

Аналогично изложенному выше, импульсная переходная функция получается как реакция данной системы на внешнее воздействие, получаемое заменой в правой части (8.70) функции $f(t)$ на единичную импульсную функцию $\delta(t-\tau)$. Производя эту замену и учитывая, что импульсная переходная функция в общем случае обозначается как $k(t, \tau)$ имеем

$$a_0(t)\,k_t^{(n)} + a_1(t)\,k_t^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,k = \\ = b_0(t)\,\delta_t^{(m)}(t-\tau) + b_1(t)\,\delta_t^{(m-1)}(t-\tau) + \ldots + b_m(t)\,\delta(t-\tau), \tag{8.71}$$

где индекс t указывает, что производная берется в отношении t.

Правая часть уравнения (8.71) является известной функцией времени t. Отождествляя ее с функцией $F(t)$, фигурирующей в (8.64), можно согласно (8.69) записать

$$k(t, \tau) = \int_0^t g(v, t)[b_0(v)\,\delta_t^{(m)}(v-\tau) + b_1(v)\,\delta_t^{(m-1)}(v-\tau) + \\ + \ldots + b_m(v)\,\delta(v-\tau)]\,dv.$$

Используя формулу (8.53 г), легко проинтегрировать правую часть

этого уравнения, в результате чего получается соотношение между импульсной переходной функцией $k(t, \tau)$ для общего случая и функцией Грина $g(t, \tau)$. Имеем:

$$k(t, \tau)=(-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \tau^m}[g(\tau, t) b_0(\tau)]+(-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \tau^{m-1}}[g(\tau, t) b_1(\tau)]+$$

$$+\ldots+(-1) \frac{\partial}{\partial \tau}[g(\tau, t) b_{m-1}(\tau)]+g(\tau, t) b_m(\tau). \qquad (8.72)$$

Таким образом, для вычисления импульсной переходной функции $k(t, \tau)$ нестационарной системы общего вида необходимо сначала вычислить функцию Грина $g(t, \tau)$ (путем интегрирования при начальных условиях (8.65) однородного дифференциального уравнения), а затем воспользоваться формулой (8.72). При известных базисных решениях получение решения однородного уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, не представляет какой-либо трудности.

Решение неоднородного уравнения (8.70) при нулевых начальных условиях выражается через импульсную переходную функцию следующей формулой:

$$x(t)=\int_0^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau. \qquad (8.73)$$

Пример. Найдем импульсную переходную функцию системы самонаведения, базисные решения $\nu_{\mathrm{I}}(t)$, $\nu_{\mathrm{II}}(t)$ которой были получены в § 8.8. При учете возмущающего воздействия S имеем следующее общее уравнение этой системы:

$$T \frac{1-at}{b} \ddot{\nu}+\left[\frac{1-at}{b}-T\left(1+\frac{a}{b}\right)\right] \dot{\nu}+(qk-1) \nu=T\dot{S}+S. \qquad (8.74)$$

Следовательно, начальные условия (8.65), при которых решение однородного уравнения является функцией Грина, принимают вид: для $t=\tau$

$$\nu=0; \quad \dot{\nu}=b/[T(1-a\tau)]. \qquad (8.75)$$

Подставляя эти начальные условия в выражение

$$\nu=C_1 \nu_{\mathrm{I}}(t)+C_2 \nu_{\mathrm{II}}(t), \qquad (8.76)$$

являющееся решением однородного уравнения, получим систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} 0&=C_1 \nu_{\mathrm{I}}(\tau)+C_2 \nu_{\mathrm{II}}(\tau); \\ b/[T(1-a\tau)]&=C_1 \dot{\nu}_{\mathrm{I}}(\tau)+C_2 \dot{\nu}_{\mathrm{II}}(\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (8.77)$$

Решая эту систему относительно C_1, C_2 и подставляя полученный результат в (8.76), находим следующее выражение функции Грина:

$$g(t, \tau)=\frac{b}{T(1-a\tau)} \frac{\nu_{\mathrm{II}}(\tau)}{[\dot{\nu}_{\mathrm{I}}(\tau) \nu_{\mathrm{II}}(\tau)-\nu_{\mathrm{I}}(\tau) \dot{\nu}_{\mathrm{II}}(\tau)} \nu_{\mathrm{I}}(t)-$$

$$-\frac{b}{T(1-a\tau)} \frac{\nu_{\mathrm{I}}(\tau)}{[\dot{\nu}_{\mathrm{I}}(\tau) \nu_{\mathrm{II}}(\tau)-\nu_{\mathrm{I}}(\tau) \dot{\nu}_{\mathrm{II}}(\tau)]} \nu_{\mathrm{II}}(t), \qquad (8.78)$$

где ν_{I}, ν_{II} — функции, определяемые выражениями (8.43) и (8.45); $\dot{\nu}_{\mathrm{I}}$, $\dot{\nu}_{\mathrm{II}}$ — производные этих функций по их аргументам.

Импульсная переходная функция $k(t, \tau)$, относящаяся к исследуемой системе (8.74), определяется согласно формуле (8.72) следующим выражением:

$$k(t,\tau)=b\left\{\frac{\nu_{II}(\tau)}{T(1-a\tau)\,[\dot\nu_{I}(\tau)\,\nu_{II}(\tau)-\nu_{I}(\tau)\,\dot\nu_{II}(\tau)]}-\right.$$
$$\left.-\frac{d}{d\tau}\,\frac{\nu_{II}(\tau)}{(1-a\tau)\,[\dot\nu_{I}(\tau)\,\nu_{II}(\tau)-\nu_{I}(\tau)\,\dot\nu_{II}(\tau)]}\right\}\nu_{I}(t)-$$
$$-b\left\{\frac{\nu_{I}(\tau)}{T(1-a\tau)\,[\dot\nu_{I}(\tau)\,\nu_{II}(\tau)-\nu_{I}(\tau)\,\dot\nu_{II}(\tau)]}-\right.$$
$$\left.-\frac{d}{d\tau}\,\frac{\nu_{I}(\tau)}{(1-a\tau)\,[\dot\nu_{I}(\tau)\,\nu_{II}(\tau)-\nu_{I}(\tau)\,\dot\nu_{II}(\tau)]}\right\}\nu_{II}(t). \tag{8.79}$$

Применения импульсной переходной функции. Не говоря уже о том, что импульсная переходная функция системы самонаведения позволяет вычислить параметрическую передаточную функцию этой системы, можно, располагая импульсной переходной функцией, решить такие важные задачи, как оценка промаха и определение маневра цели, приводящего к наибольшему промаху.

Рассмотрим сначала порядок действий при решении последней задачи. Возмущающая функция S, фигурирующая в уравнении системы самонаведения (8.74), зависит от проекции полного ускорения цели $\dot{\bar V}_{ц}$ на перпендикуляр к линии визирования и от проекции на этот перпендикуляр тангенциального ускорения ракеты $\dot V_{Р}$ — см. (8.13). Для простоты будем рассматривать случай $\dot V_{Р} = 0$. Тогда

$$S=(\dot{\bar V}_{ц}\,\bar e)/(2\,|\,\dot r\,|)\,. \tag{8.80}$$

Вследствие ограниченности ускорения цели величина S также ограничена. Введем для максимального значения S_{max}, соответствующего предельному ускорению цели в поперечном по отношению к линии визирования направлении, следующие обозначение:

$$S_{max} = l. \tag{8.81}$$

Как показывает формула (8.52), промах h тем больше, чем больше угловая скорость $\nu\,(t_k)$ линии визирования в момент t_k «ослепления» координата цели. Следовательно, во избежание поражения, цель должна маневрировать так, чтобы величина $\nu_k = \nu\,(t_k)$ принимала наибольшее возможное значение.

Указанный маневр цели может быть определен на основании теории накопления отклонений, разработанной Б. В. Булгаковым [5]. Применяя эту теорию, находим, что максимальное значение величины $\nu\,(t_k)$ возникает в том случае, когда цель в любой момент времени развивает предельное ускорение, перпендикулярное линии визирования, причем знак соответствующего возмущения $S_{max}\,(\tau)$ все время совпадает или противоположен знаку импульсной переходной функции системы $k\,(t, \tau)$ при подстановке в эту функцию вместо t момента t_k «ослепления» координатора.

Действительно, согласно (8.70), (8.74) и (8.73) угловая скорость линии визирования в момент t_k

$$\nu_k = \nu(t_k) = \int_0^{t_k} k(t_k, \tau) S(\tau)\, d\tau, \qquad (8.82)$$

где функция $k(t, \tau)$ определяется выражением (8.79). Из формулы (8.82) видно, что интеграл и, следовательно, угловая скорость ν_k принимает максимальное значение $\nu_{k\,\max}$, если возмущение $S(\tau)$ имеет все время предельную по модулю величину l и изменяется в такт или в противотакт с функцией $k(t_k, \tau)$, как это показано на рис. 8.16.

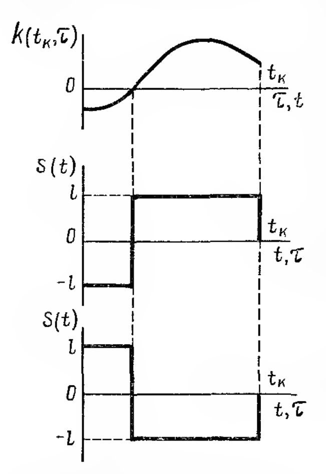


Рис. 8.16. Два варианта изменения возмущения $S(t)$, вызывающего максимально возможную угловую скорость $\nu(t_k)$

Другое важное приложение импульсной переходной функции заключается в использовании ее для оценки среднеквадратического отклонения в угловой скорости линии визирования в момент t_k, возникающего под действием случайных возмущений. Пусть $n(t)$ — стационарная случайная помеха, содержащаяся в измеренном значении угловой скорости линии визирования. Тогда уравнение (8.30) системы управления примет вид

$$T\dot{\Omega} + \Omega = k(\nu + n). \qquad (8.83)$$

Сводя систему уравнений (8.28) и (8.83) в одно уравнение, получим

$$T\,\frac{1-at}{b}\,\ddot{\nu} + \left[\frac{1-at}{b} - T\left(1 + \frac{a}{b}\right)\right]\dot{\nu} + (qk-1)\nu = -qkn. \qquad (8.84)$$

Возмущение S здесь принято равным нулю.

Импульсная переходная функция системы (8.84) совпадает с функцией Грина $g(t, \tau)$, определяемой выражением (8.78). Основываясь на этой функции, можно найти параметрическую передаточную функцию $W(t_k, s)$. Поскольку однако на интервале t_0, t_k функция $g(t_k, t_k - u)$ не затухает (как видно из (8.78), (8.43) и (8.45), эта функция отлична от нуля и при $u > t_k$), формула (8.63) среднего квадрата ошибки дает завышенный результат.

Точное значение среднего квадрата ошибки $\overline{\nu^2}(t_k)$ под действием случайной помехи $n(t)$ следует искать, рассматривая реакцию системы самонаведения на стационарное случайное воздействие $n(t)$. В этом случае вместо одной системы рассматривается ансамбль (совокупность) *одинаковых систем*, работающих в одинаковых условиях, и под ошибкой $\overline{\nu^2}(t)$ понимается результат осреднения по ансамблю величины ν^2 для момента t. Используя (8.69), можно записать

$$\nu(t) = -qk\int_0^t n(\sigma)\, g(t, \sigma)\, d\sigma. \qquad (8.85)$$

Автокорреляционная функция $R_{\nu\nu}(t_1, t_2)$ величины ν представляет собой осредненное значение произведения $\nu(t_1)\,\nu(t_2)$. Применяя формулу осреднения по ансамблю, получим при учете (8.85):

$$R_{\nu\nu}(t_1,\ t_2) = (qk)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} p\,(n_1\ n_2) \left[\int\limits_0^{t_1} n\,(\sigma)\, g\,(t_1,\sigma)\, d\sigma \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^{t_2} n\,(\lambda)\, g(t_2,\ \lambda)\ d\lambda \right] dn_1\ dn_2. \qquad (8.86)$$

Здесь $p\,(n_1,\ n_2)$—двумерная плотность вероятности для сечений t_1, t_2 ансамбля реализаций случайной величины $n\,(t)$. Выражение (8.86) можно переписать в виде

$$R_{\nu\nu}\,(t_1,\ t_2) = (qk)^2 \int\limits_0^{t_1} g\,(t_1,\ \sigma) \int\limits_0^{t_2} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} p\,(n_1,n_2)\, n\,(\sigma)\, n\,(\lambda) \times \right.$$

$$\left. \times dn_1\, dn_2 \right] g\,(t_2,\ \lambda) d\sigma d\lambda. \qquad (8.87)$$

Поскольку σ и λ, изменяясь соответственно в диапазонах 0, t_1; 0, t^2, могут принимать значения t_1 и t_2, а сами величины t_1, t_2 могут изменяться от 0 до ∞, выражение, стоящее в (8.87) в квадратных скобках, представляет собой автокорреляционную функцию $R_{nn}\,(\sigma,\ \lambda)$ случайного воздействия $n\,(t)$.

Среднее значение квадрата отклонения равно автокорреляционной функции при одинаковых значениях ее аргументов. Поэтому, полагая $t_1 = t_2 = t$, находим

$$\widetilde{\nu^2\ (t)} = (qk)^2 \int\limits_0^{t} g\ (t,\ \sigma) \int\limits_0^{t} R_{nn}\,(\sigma, \lambda)\, g\ \ (t,\ \lambda) d\lambda d\sigma. \qquad (8{,}88)$$

Если случайное воздействие $n\,(t)$ стационарно, то автокорреляционная функция R_{nn} зависит лишь от разности аргументов, т. е. $R_{nn}\,(\sigma,\ \lambda) = R_{nn}\,(\sigma - \lambda) = R_{nn}\,(\lambda - \sigma)$.

При случайном воздействии $n\,(t)$ в виде белого шума имеем

$$R_{nn}\,(\sigma, \lambda) = \widetilde{n^2}\ \delta(\lambda - \sigma), \qquad (8.89)$$

где $\delta\,(\lambda - \sigma)$—единичная импульсная функция; $\widetilde{n^2}$ — мощность белого шума.

В этом случае (8.88) сводится при использовании (8.53 д) к виду

$$\widetilde{\nu^2\,(t)} = (qk)^2\ \widetilde{n^2} \int\limits_0^{t} g^2\,(t,\ \sigma)\, d\sigma. \qquad (8.90)$$

Как показывают формулы (8.88), (8.90), даже при стационарности внешнего случайного воздействия $n\,(t)$ среднее значение квадрата отклонения $\widetilde{\nu^2\ (t)}$ зависит от времени t. Полагая $t = t_k$, где t_k—момент «ослепления» координатора цели, можно вычислить величину $\nu_k = \sqrt{\widetilde{\nu^2(t_k)}}$ в формуле (8.52), определяющей промах.

Конечно, кроме составляющей промаха, зависящей от только что указанной величины ν_k, имеются составляющие и от других причин (например, от возмущения S). Вследствие справедливости для линейных систем принципа суперпозиции, все эти составляющие складываются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барковский В. В., Захаров В. Н., Шаталов А. С. «Методы синтеза систем управления», Машиностроение, 1969.

2. Блейклок Дж. Г. «Автоматическое управление самолетами и ракетами», Пер. с англ. «Машиностроение», 1972.

3. Боднер В. А. «Теория автоматического управления полетом». «Наука», 1964.

4. Булгаков Б. В. «Колебания», Техтеоретиздат, 1964.

5. Булгаков Б. В., Кузовков Н. Т. «О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с переменными параметрами», «Прикладная математика и механика», 1950, вып. I.

6. Колесников К. С. «Жидкостная ракета как объект регулирования», «Машиностроение», 1969.

7. Краснов Н. Ф. «Аэродинамика», «Высшая школа», 1971.

8. Красовский А. А. «Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами», «Машиностроение», 1969.

9. Кринецкий Е. И. «Системы самонаведения», «Машиностроение», 1970.

10. Кузовков Н. Т. «Динамика систем автоматического управления», «Машиностроение», 1968.

11. Лебедев А. А., Карабанов В. А. «Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами», «Машиностроение», 1965.

12. Летов А. М. «Динамика полета и управление», Наука, 1969.

13. Михайлов Ф. А., Теряев Е. Д., Булеков В. П., Саликов Л. М., Диканова Л. С. «Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами», «Наука», 1971.

14. Михалев И. А., Окоемов Б. Н., Павлина И. Г., Чикулаев М. С., Эйдинов Н. М. «Системы автоматического управления самолетом. Методы анализа и расчета», «Машиностроение», 1971.

15. Никитин Е. А., Балашова А. А. «Проектирование дифференцирующих и интегрирующих гироскопов и акселерометров», «Машиностроение», 1969.

16. Пельпор Д. С. (ред.) «Гироскопические системы», часть I, II. «Высшая школа», 1971.

17. Преснухин Л. Н., Смирнов Ю. М., Соломонов Л. А., Темнов И. В. «Основы расчета и проектирования счетно-решающих устройств», «Высшая школа», 1965.

18. Соловьев Я. И. «Гироскопические приборы и автопилоты», Оборонгиз, 1947.

19. Солодовников В. В. (ред.). «Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования», кн. 1, 2, 3. «Машиностроение», 1967 — 1969.

20. Федосов Е. А., Батков А. М., Левитин В. Ф., Скрипкин В. А. «Общие вопросы теории наведения», Труды IV Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике), «Наука», 1972.

21. Феодосьев В. И., Синярев Б. Б. «Введение в ракетную технику», Оборонгиз, 1960.

22. Хитрик М. С., Федоров С. М. (ред.) «Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами», «Машиностроение» 1972.

23. Чернобровкин Л. С. (ред.). «Беспилотные летательные аппараты», «Машиностроение», 1967.

24. Abramson H. «The Dynamic Behavior of Liguids in moving Containers». Washington, 1967.

25. Franke H. M. «Flugregler — Systeme», München — Wien, 1968.

26. Greensite A. L. «Control Theory», Vol I, II, New York, Washington, 1970.

27. Kalman R. E. Bucy R. S. «New Results in Linear Filtering and Prediction Theory». Y. Basic Engrg. Frans ASME, Series D, vol 83, March, 1961.

28. Luenberger D. G. «An Introduction to Observers», IEEE Trans. on Antomatic Control, Vol AC—16 № 6, December, 1971.

29. Swaim R. L. «Control System Synthesis for a Launch Vehicle with Severe Mode Interaction» IEEE Trans. on Antomatic Control, October, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Кузовков Николай Тимофеевич

СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
(БАЛЛИСТИЧЕСКИХ
И ЗЕНИТНЫХ РАКЕТ)

Редактор В. И. Петухова, художник В. З. Казакевич, художественный редактор Н. К. Гуторов, технический редактор Н. А. Битюкова, корректор Г. А. Чечеткина

Т-07318 Сдано в набор 16/VI-75 г. Подп. к печати 30/III-76 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 1 Объем 19 печ. л. Усл. п. л. 19 Уч.-изд. л. 19,22
Изд. № СТД—202 Тираж 7000 экз. Заказ № 305 Цена 90 коп.

План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1975 г. Позиция № 150

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Москва, И-41, Б. Переяславская, дом. 46